

Fiche réalisée par P.Bourton

Pour en savoir plus <http://montblancsciences.free.fr>

## Chap 11 - Chute verticale d'un solide

# I ) Force de pesanteur terrestre :

## 1) Force de pesanteur :

Le poids d'un objet est égal à la force d'attraction gravitationnelle exercée par la Terre.

Cette force de pesanteur est caractérisée par une origine : le centre de gravité G (ou centre d'inertie) du corps, une direction : la verticale passant par G, un sens : vers le bas et une valeur :  $P = m.g$  avec P en Newton (N), m en kg et g en  $N.kg^{-1}$

## 2) Champ de pesanteur terrestre :

En un point donné M, au voisinage de la Terre, le poids d'un objet de masse m peut s'écrire :

$P = m \mathbf{g}$  où  $\mathbf{g}$  est le vecteur champ de pesanteur terrestre au point M considéré.

Ce vecteur champ de pesanteur terrestre se caractérise par une origine M, une direction : la verticale passant par M, un sens : vers le bas et une valeur : l'intensité g de la pesanteur au point M

Remarque : La valeur de l'intensité g de la pesanteur dépend de la latitude du point M où l'on opère  $g = 9,78 N.kg^{-1}$  à l'équateur,  $g = 9,83 N.kg^{-1}$  au pôle Nord, au niveau de la mer

et de son altitude (diminution d'environ 1 % tous les 30 km).

## 3) Champ de pesanteur uniforme :

Dans un domaine restreint au voisinage de la Terre (dimensions de l'ordre de quelques kilomètres), on peut considérer que le champ de pesanteur est uniforme : le vecteur champ de pesanteur  $\mathbf{g}$  a même direction, même sens et même valeur en tout point de ce domaine restreint (voir l'étude des chutes rectilignes ou paraboliques dans la suite du cours).

## II ) Poussée d'Archimède et force de frottement fluide:

La surface d'un solide immergé dans un fluide (liquide, gaz) est constamment "frappée" par les molécules de ce fluide. Ces chocs créent la poussée d'Archimède. De plus, si ce solide se déplace par rapport au fluide, il apparaît des forces de "frottement fluide" sur toute la surface du solide.

### 1) Poussée d'Archimède :

La poussée d'Archimède est une force de contact répartie sur la surface de contact solide-fluide. On la représente par un vecteur  $P_A$  qui possède une origine : le centre d'inertie C du volume de fluide déplacé, une direction : la verticale passant par C, un sens : vers le haut et une valeur :

$P_A = \rho_{\text{fluide}} V_{\text{immergé}} g$  égale au poids du fluide déplacé.

La poussée d'Archimède  $P_A$  s'exprime en Newton.(N), la masse volumique du fluide  $\rho_{\text{fluide}}$  s'exprime en  $\text{kg.m}^{-3}$  et le volume de fluide déplacé  $V$  s'exprime en  $\text{m}^3$  et  $g$  s'exprime en  $\text{N.kg}^{-1}$

**Remarque :** Le centre d'inertie C du volume de fluide déplacé peut être différent du centre d'inertie G du solide. C'est le cas, notamment, si le solide n'est que partiellement immergé dans le fluide ou s'il n'est pas homogène. Par contre, dans le cas fréquent d'un solide homogène totalement immergé dans le fluide, le centre d'inertie C du volume de fluide déplacé est confondu avec le centre d'inertie G du solide.

### 2) Force de frottement fluide :

Si un solide se déplace dans un fluide, il apparaît des forces de "frottement fluide" sur toute la surface du solide.

Ces forces de frottement fluide sont souvent résistantes (chute d'une bille ralentie par la présence d'air ou d'eau) et parfois motrices (feuille emportée par le vent).

Dans le cas d'un solide homogène animé d'un mouvement de translation dans le fluide, on les modélise par un vecteur de sens opposé au mouvement si les frottements sont résistants.

Comme on étudie le mouvement du centre d'inertie G, on reporte en ce point toutes les forces extérieures agissant sur le solide..

La valeur  $f$  de la force de frottement dépend de la nature du fluide. Elle dépend également de la vitesse  $v$  du solide en translation, de sa forme, de son état de surface.

Dans les exercices qui suivront, cette valeur de la force de frottement sera modélisée par une expression de la forme :  $f = k.v^n$  où  $n$  est un entier

Par exemple :  $f = k.v$  pour les vitesses faibles (quelques  $\text{cm.s}^{-1}$ ) ou  $f = k.v^2$  pour des vitesses plus importantes ( quelques  $\text{m.s}^{-1}$ ).

On peut aussi être amené à choisir une expression de la forme  $f = k_1.V + k_2.V^2 + \dots$

C'est l'expression qui donne la meilleure adéquation entre les prévisions théoriques et les résultats expérimentaux qui, bien évidemment, doit être retenue.

### III ) Chute verticale libre – Mouvement rectiligne uniformément accéléré :

#### 1) Définition :

Un solide est en chute libre s'il n'est soumis qu'à son poids .

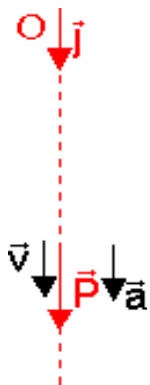
On est dans ce cas, si on supprime l'air pour étudier la chute d'un solide dans le vide.

La chute est quasi libre si on étudie, dans l'air, la chute d'une bille de masse volumique grande par rapport à la masse volumique de l'air (la poussée d'Archimède est alors négligeable par rapport au poids) sur une hauteur de quelques mètres (les forces de frottement sont, à faible vitesse, également négligeables par rapport au poids).

#### 2) Chute verticale libre, sans vitesse initiale :

Une petite bille de métal de masse  $m$  est lâchée à  $2m$  du sol, sans vitesse initiale, à partir de l'origine d'un axe vertical  $(O, j)$  orienté vers le bas. ( $g = 9,80 \text{ N.kg}^{-1}$ )

- S'agit-il d'une chute libre ? Justifier.
- Etablir l'équation différentielle du mouvement.
- Quelle est la solution de cette équation ? (l'origine des temps choisie au départ de la bille).
- Déterminer l'instant  $t_1$  et la vitesse  $v_1$  où la bille frappe le sol



#### SOLUTION

a) La bille étant en métal, son poids  $P$  est très grand par rapport à la poussée d'Archimède  $P_A$  dans l'air. On peut donc négliger la poussée d'Archimède. De plus, la bille est petite, de forme sphérique, sa vitesse restera faible (petite hauteur de chute). Dans ces conditions, la force de frottement fluide exercée par l'air sur la surface de la bille est négligeable par rapport au poids.

La seule force agissant sur la bille est donc le poids . La chute est dite libre.

b) On étudie la bille (système) dans le référentiel terrestre galiléen, auquel on associe le repère  $(O, j)$ .  $j$  vertical vers le bas. Force extérieure sur la bille : poids  $P = m g$  vertical vers le bas.

Appliquons la deuxième loi de Newton :

Dans un référentiel Galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un solide est égale au produit de la masse  $m$  du solide par l'accélération de son centre d'inertie.

$$P = m.a \Rightarrow m.g = m.a \Rightarrow g = a \Rightarrow g.j = a.j \Rightarrow a = g$$

$$g = 9,80 \text{ N.kg}^{-1} \quad a = dv/dt \Rightarrow dv/dt = g \quad (\text{équation différentielle})$$

c) Solution de l'équation différentielle  $dv/dt = g$ .

La fonction  $v$  qui admet  $g$  comme dérivée est :  $v = g.t + k$  ( $k$  : constante)

A  $t = 0s$ ,  $v = k = v_0 = 0 \text{ m.s}^{-1} \Rightarrow v = g t$ , soit  $dz / dt = g.t$

La fonction  $z$  qui admet  $g.t$  comme dérivée est :  $z = \frac{1}{2} g.t^2 + k'$  ( $k'$  : constante)

A  $t = 0s$ ,  $z = k' = z_0 = 0 \text{ m} \Rightarrow z = \frac{1}{2} g t^2$

**Les équations horaires du mouvement sont donc :  $z = \frac{1}{2} g.t^2$ ,  $v = g.t$  et  $a = g$**

La bille a un mouvement rectiligne uniformément accéléré (le vecteur accélération ne change pas).

d) La bille frappe le sol pour  $z_S = 2m$ .  $\Rightarrow z_S = \frac{1}{2} g t_S^2$  ;  $2 = \frac{1}{2} \times 9,80 \times t_S^2$

$t_S^2 = 4 / 9,80 = 0,4082 \Rightarrow t_S = 0,639 \text{ s}$  ( $t_S$  positif)

Utilisons  $v = g t$  avec  $t_S = 0,639 \text{ s}$  :  $v_S = 9,80 \times 0,639 = 6,26 \text{ m.s}^{-1}$

## IV ) Chute verticale d'une bille soumise à une force de frottement fluide :

**Exercice** : Une bille (masse volumique  $\rho$ , rayon  $r$ ) est lâchée, sans vitesse initiale, dans une éprouvette contenant de l'huile (masse volumique  $\rho_0$ ).

a) Exprimer le poids  $P$  et la poussée d'Archimède  $P_A$  exercée sur la bille en fonction de l'intensité de la pesanteur terrestre  $g$ , du volume  $V_b$  de la bille et des masses volumiques  $\rho$  et  $\rho_0$ .

b) Etablir l'équation différentielle du mouvement de la bille en considérant la force de frottement fluide peut s'écrire sous la forme :  $f = -k.v$  (valable lorsque la vitesse reste faible). ( $f = k.v$ )

(Rem :  $k = 6 \pi . \eta . r$  avec  $\eta$  est le coefficient de viscosité du liquide et  $r$  est le rayon de la bille)

Mettre l'équation sous la forme :  $dv/dt + v/\tau = c$

c) Déterminer  $c$  en fonction  $g$ ,  $\rho$  et  $\rho_0$ , puis l'accélération initiale  $a_0$  de la bille.

Déterminer  $\tau$  en fonction  $\rho$ ,  $V_b$  et  $k$ .

d) Calculer les valeurs de  $k$ ,  $c$ ,  $V_b$  et  $\tau$ .

e) Déterminer la vitesse limite de la bille  $v_{lim}$ . Calculer la valeur  $v_{lim}$

On donne :  $r = 1,1 \text{ mm}$  ;  $\rho = 2400 \text{ kg.m}^{-3}$  ;  $\rho_0 = 950 \text{ kg.m}^{-3}$  ;  $g = 9,81 \text{ N.kg}^{-1}$  ;  $\eta = 4,50 \text{ S.I.}$

### SOLUTION

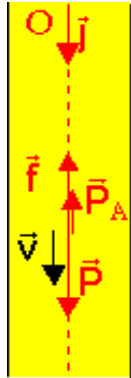
a) poids :  $P = m.g = V_b . \rho . g$

La poussée d'Archimède  $P_A$  exercée par le liquide sur la bille est égale au poids du liquide déplacé

par la bille :  $P_A = m_{\text{liquide}} \cdot g = \rho_0 \cdot V_b \cdot g$

b) Le système (bille) est étudié dans le référentiel terrestre galiléen auquel on associe le repère ( O, i ).

Les forces extérieures exercées sur la bille sont : le poids, action gravitationnelle de la Terre sur la bille.  $P = P \cdot j$  ; la poussée d'Archimède  $P_A$  exercée par le liquide sur la bille.  $P_A = -$



$P_A \cdot j$  et

la force de frottement fluide  $f = -k \cdot v = -k \cdot v \cdot j$  exercée par le liquide sur la bille .

2ème loi de Newton : Dans un référentiel Galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un solide est égale au produit de la masse m du solide par l'accélération de son centre d'inertie :  $\Sigma F_{\text{ext}} = m \cdot a$  (1)

$P = V_b \cdot \rho \cdot g \cdot j$  ;  $P_A = -\rho_0 \cdot V_b \cdot g \cdot j$  ,  $f = -k \cdot v \cdot j$  ;  $a = m \cdot dv/dt = \rho \cdot V_b \cdot dv/dt \cdot j$

(1)  $P + P_A + f = m \cdot a \Rightarrow V_b \cdot \rho \cdot g \cdot j - V_b \cdot \rho_0 \cdot g \cdot j - k \cdot v \cdot j = V_b \cdot \rho \cdot dv/dt \cdot j$  ( on divise

tout par  $\rho \cdot V_b$  )

Soit :  $(\rho - \rho_0) \cdot g / \rho - k \cdot v / (\rho \cdot V_b) = dv/dt \Rightarrow (1 - \rho_0/\rho) \cdot g - k \cdot v / (\rho \cdot V_b) = dv/dt$

$dv/dt + k \cdot v / (\rho \cdot V_b) = (1 - \rho_0/\rho) \cdot g$

c) A l'instant du départ  $t = 0$  s, l'énoncé indique que la vitesse est nulle.

on obtient :  $(dv/dt)_0 = a_0 = c = g \cdot (1 - \rho_0/\rho)$   $\tau = \rho \cdot V_b / k$

d)  $k = 6 \pi \eta r = 6 \times 3,14 \times 4,50 \times 1,1 \cdot 10^{-3} = 9,33 \cdot 10^{-2}$  S.I. ;  $c = 9,81 \times (1 - 950 / 2400) = 5,93$  S.I.

$V_b = 4/3 \pi r^3 = 4/3 \times 3,14 \times (1,1 \cdot 10^{-3})^3 = 5,57 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3$

$\tau = \rho \cdot V_b / k = 2400 \times 5,57 \cdot 10^{-9} / 9,33 \cdot 10^{-2} = 1,43 \cdot 10^{-4}$  S.I. ( en fait : s)

e) La force motrice  $P$  vient à être compensée par la somme des deux forces résistantes  $P_A + f_{\text{lim}}$  .

La somme des forces est alors nulle et, d'après la deuxième loi de Newton :  $P + P_A + f_{\text{lim}} = m \cdot a_{\text{lim}}$

l'accélération limite  $a_{\text{lim}}$  est nulle :  $a_{\text{lim}} = 0$

$0 + v_{\text{lim}} / \tau = c \Rightarrow v_{\text{lim}} = \tau \cdot c = (\rho \cdot V_b / k) \cdot g \cdot (1 - \rho_0/\rho) = V_b \cdot g \cdot (\rho - \rho_0) / k$

$v_{\text{lim}} = \tau \cdot c = 1,43 \cdot 10^{-4} \times 5,93 = 8,48 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0,848 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$

## V ) Résolution d'une équation différentielle - Méthode graphique d'Euler



Exercice :

Etude d'une chute verticale d'une bille (rayon r, masse volumique  $\rho$ ) dans un récipient contenant de l'huile (masse volumique  $\rho_0$ , coefficient de viscosité  $\eta$ )

La bille est soumise à trois forces : le poids  $P = \rho \cdot V \cdot g \cdot j$ , dû à l'action gravitationnelle de la Terre sur la bille, la poussée d'Archimède  $P_A = -\rho_0 \cdot V \cdot g \cdot j$  exercée par le liquide sur la bille et la force de frottement fluide  $f = -k \cdot v \cdot j$  exercée par le liquide sur la bille

L'équation différentielle de la vitesse  $v$  de la bille :

$$dv/dt + v / \tau = c \quad \text{avec } c = g (1 - \rho_0/\rho) \quad \text{et} \quad \tau = \rho V_b / k$$

$$c = 5,93 \text{ S.I.}, \quad \tau = 1,43 \cdot 10^{-4} \text{ S.I.} \quad \text{et} \quad v_{\text{lim}} = 8,48 \cdot 10^{-4} \text{ m.s}^{-1}$$

- 1) Indiquer les unités des constantes  $\tau$  et  $c$ .
- 2) Présentation puis utilisation de la méthode graphique d'Euler pour résoudre une équation différentielle en choisissant un pas  $\Delta t = 4 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ .
- 3) Analyser le graphe obtenu.
- 4) Montrer que la solution de l'équation différentielle est de la forme :  $v = a \cdot \exp(-t / \tau) + b$ . Exprimer littéralement les constantes  $a$  et  $b$ . Calculer leurs valeurs.

### **SOLUTION**

1) Dans l'équation, tout doit avoir la même unité.  $c$  et  $v/\tau$  ont donc la même unité que  $dv/dt$ , celle de l'accélération :  $\text{m.s}^{-2}$ .  $c$  est donc en  $\text{m.s}^{-2}$  et  $\tau$  en seconde

2) La méthode d'Euler consiste à assimiler  $a = dv/dt$  à  $\Delta v / \Delta t$ , où  $\Delta v = v_{i+1} - v_i$  et  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ .

Ce qui revient à considérer que sur  $\Delta t$  très petit, l'accélération  $a$  est constante, on a alors la courbe de la vitesse qui est une droite et égale au coefficient directeur de cette droite :  $a = (v_{i+1} - v_i) / (t_{i+1} - t_i)$

Avec un pas  $\Delta t = 4 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ , on résout de façon approchée de l'équation différentielle :

$$dv/dt + v / 1,43 \cdot 10^{-4} = 5,93 \quad \Rightarrow \quad dv/dt = 5,93 - 6993 v$$

➤ Entre les instants  $t$  et  $t + \Delta t$ , la vitesse varie de  $\Delta v$  et l'accélération est voisine de  $\Delta v / \Delta t$

$$\text{Avec } \Delta t = 4 \cdot 10^{-5} \text{ s} \text{ et } a = dv/dt = 5,93 - 6993 v \quad \text{et} \quad \Delta v = a \cdot \Delta t = 4 \cdot 10^{-5} a$$

A l'instant  $t_0 = 0 \text{ s}$ , la vitesse initiale est nulle  $v_0 = 0 \text{ m.s}^{-1}$ , l'accélération initiale,  $a_0 = 5,93 \text{ m.s}^{-2}$

➤ Entre les dates  $t_0$  et  $t_1 = 0 + \Delta t$ , la vitesse augmente de  $\Delta v = 4 \cdot 10^{-5} a_0 = 2,372 \cdot 10^{-4} \text{ m.s}^{-1}$

$$v_1(t_1) = v_1 = v_0 + \Delta v = 2,372 \cdot 10^{-4} \text{ m.s}^{-1} \quad \text{et} \quad a_1 = 5,93 - 6993 v_1 = 4,27 \text{ m.s}^{-2}$$

➤ Entre les dates  $t_1$  et  $t_2 = t_1 + \Delta t$ , la vitesse augmente de  $\Delta v = 4 \cdot 10^{-5} a_1 = 1,708 \cdot 10^{-4} \text{ m.s}^{-1}$

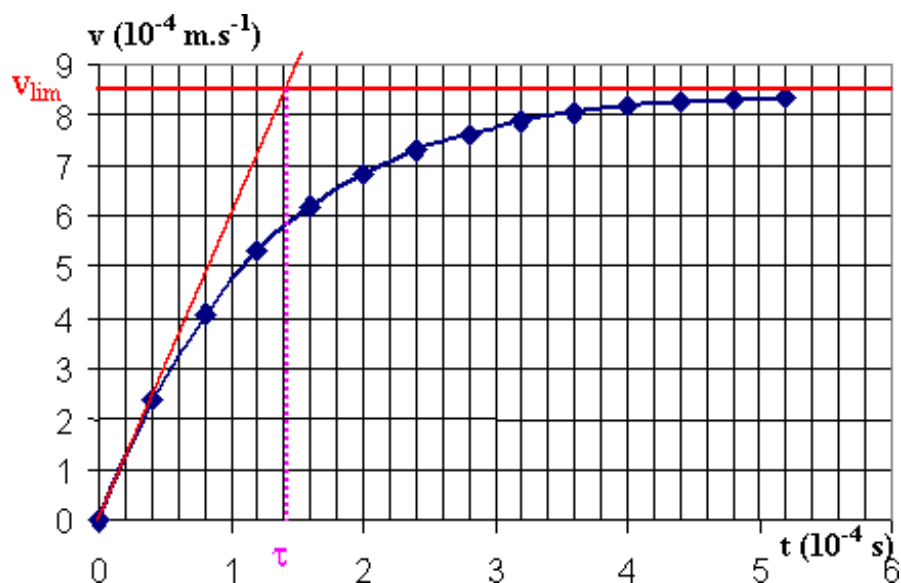
$$v_2 = v_1 + \Delta v = 4,08 \cdot 10^{-4} \text{ m.s}^{-1} \quad \text{et} \quad a_2 = 5,93 - 6993 v_2 = 3,08 \text{ m.s}^{-2}$$

On continue ainsi les calculs jusqu'à atteindre la vitesse limite  $v_{\text{lim}}$ .

On trace le graphique de  $v$  en fonction de  $t$ .

Le tableau suivant rassemble les résultats des calculs :

$t (10^{-4} \text{ s})$	0,0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2	3,6	4,0	4,4	4,8	5,2
$v(10^{-4}\text{ms}^{-1})$	0,00	2,37	4,08	5,31	6,20	6,84	7,30	7,63	7,87	8,04	8,16	8,25	8,31	8,36
$a ( \text{ms}^{-2})$	5,93	4,27	3,08	2,21	1,59	1,15	0,825	0,594	0,428	0,306	0,222	0,162	0,11	0,09



3) Le mouvement de la bille comporte deux phases , un régime transitoire, au cours duquel la vitesse varie et un régime permanent pendant lequel la vitesse est constante et est égale à la valeur limite.

La vitesse tend de façon asymptotique vers la valeur limite  $v_{\text{lim}} = 8,48.10^{-4} \text{ m.s}^{-1}$

La tangente à l'origine coupe l'asymptote au temps  $t = \tau = 1,43.10^{-4} \text{ s}$   
 ( $\tau$  est la constante de temps de l'équation différentielle ).

$$4) v = a.\exp(-t/\tau) + b \Rightarrow dv/dt = -(a/\tau).\exp(-t/\tau) + 0$$

On remplace dans l'équation différentielle :  $-(a/\tau).\exp(-t/\tau) + (a/\tau).\exp(-t/\tau) + b/\tau = c$

$$\text{soit } b/\tau = c \Rightarrow b = c.\tau = v_{\text{lim}}$$

Pour déterminer la valeur de  $a$  , on utilise les conditions initiales : à  $t = 0 \text{ s}$  ,  $v_0 = 0 \text{ m.s}^{-1}$

$$0 = a.\exp(-0/\tau) + b \quad (\exp(0) = 1) \Rightarrow 0 = a + b \Rightarrow a = -b$$

$$\text{solution : } v = -c.\tau \exp(-t/\tau) + c.\tau$$

$$v = c.\tau.(1 - \exp(-t/\tau)) = v_{\text{lim}}.(1 - \exp(-t/\tau)) \text{ avec } \tau = 1,43.10^{-4} \text{ s et } v_{\text{lim}} = 8,48.10^{-4} \text{ m.s}^{-1}$$

©Sciences Mont Blanc

Fiche réalisée par P.Bourton

Pour en savoir plus <http://montblancsciences.free.fr>