Fiche réalisée par P.Bourton

Pour en savoir plus http://montblancsciences.free.fr/

Chap 12 – Mouvement d'un projectile

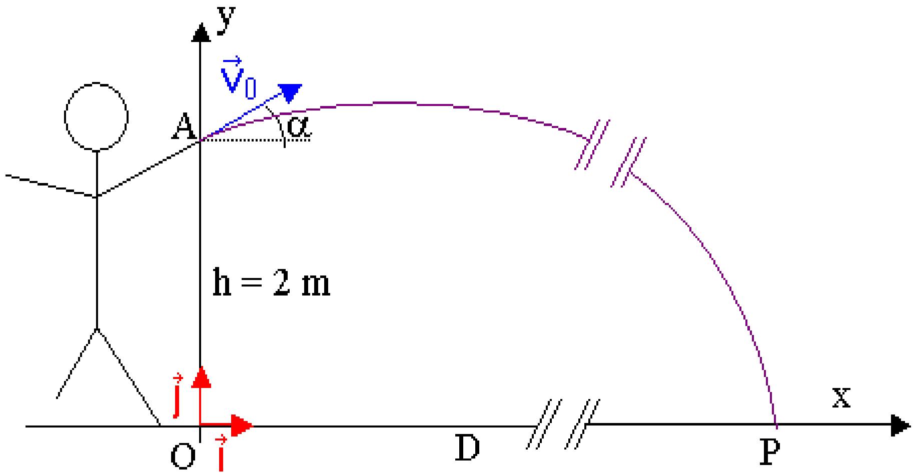
Etude d'un projectile

Le lancer de poids semble être l'application idéale des lois de la balistique. Le but est surtout de lancer le "poids" le plus loin possible. Ici, la poussée de l'athlète reste prépondérante et on constate que l'angle de tir est effectivement proche de 45°.

On étudie le mouvement du "poids" dans le repère orthonormé (O, i, j, k), l'origine O étant le point du sol situé à la verticale du centre d'inertie du poids à la date t = 0 (schéma ci-dessous).

Données : pour $\alpha = 45°$, $\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha = 0{,}5$ et $\tan \alpha = 1$; $18^2 = 324$

Tous les calculs sont à réaliser SANS CALCULATRICE !!!



Données : si $\alpha = 45°$, $\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha = 0{,}5$ et $\tan \alpha = 1$; $18^2 = 324$, g = 10 N.kg-1 , $\sqrt{1{,}8} \approx 1{,}3$

1) Calculer, à t = 0 s, les cordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OA}$ et du vecteur vitesse v_0 dans le repère (O, i, j, k) sous forme littérale.

2) Etablir sous forme littérale les équations horaires du mouvement du centre d'inertie M du "poids" dans le repère (O, i, j, k). Montrer que le mouvement est plan.

3) En déduire l'équation littérale de la trajectoire et préciser sa nature.

4) En déduire que, pour $\alpha = 45°$, le carré de la vitesse initiale peut se mettre sous la forme littérale $v_0^2 = g.D^2 / (D+h)$, D étant la distance mesurée au sol pour ce lancer.

5) Calculer l'énergie cinétique initiale du "poids" de masse 4,0 kg ainsi lancé dans une compétition féminine, la performance étant réalisée pour un lancer D égal à 18 m et $\alpha = 45°$.

6) Pour un autre lancer d'un athlète jeune, on mesure la vitesse initiale à 10 $m.s^{-1}$ et $\alpha = 45°$.

Déterminer la distance D réalisée.

Solution :

1) Conditions initiales.

$$\overrightarrow{OA} \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = OA = h = 2 \text{ m} \\ z_0 = 0 \end{cases} \qquad \vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0.\cos\alpha \\ v_{0y} = v_0.\sin\alpha \\ v_{0z} = 0 \end{cases}$$

2) Equations horaires du mouvement.

Le système "poids" est étudié dans le référentiel terrestre galiléen auquel on associe le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Il est en chute libre, il s'est soumis qu'à son poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$

Deuxième loi de Newton : Dans un référentiel Galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un solide est égale au produit de la masse m du solide par l'accélération $\vec{a}$ de son centre d'inertie : $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots = m\,\vec{a}$

$\Rightarrow$ $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$ L'accélération est donc : $\vec{a} = \vec{g}$

Les coordonnées du vecteur accélération sont donc :

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = dv_x / dt = 0 \\ a_y = dv_y / dt = -g \\ a_z = dv_z / dt = 0 \end{cases} \quad \text{primitives} \Rightarrow \vec{v} \begin{cases} v_x = k_1 \\ v_y = -g.t + k_2 \\ v_z = k_3 \end{cases}$$

k_1, k_2 et k_3 sont des constantes que l'on détermine en utilisant les conditions initiales

$k_1 = v_0.\cos\alpha$; $k_2 = v_0.\sin\alpha$ et $k_3 = 0$

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = dx / dt = v_0.\cos\alpha \\ v_y = dy / dt = -g.t + v_0.\sin\alpha \end{cases} \quad \text{primitives} \Rightarrow \overrightarrow{OM} \begin{cases} x = v_0.\cos\alpha.t + k_4 \\ y = -\tfrac{1}{2} g t^2 + v_0.\sin\alpha.t + k_5 \end{cases}$$

$v_z = dz / dt = 0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $z = k_6$

k_4, k_5 et k_6 sont des constantes que l'on détermine en utilisant les conditions initiales

$k_4 = x_0 = 0$; $k_5 = y_0 = h = 2$ m ; $k_6 = z_0 = 0$

$z = 0$ à tout l'instant, la trajectoire est donc plane. Le mouvement a lieu dans un plan vertical

Les équations horaires du mouvement sont :

$x = v_0.\cos \alpha .t$; $y = - g.t^2 + v_0.\sin \alpha.t + h$ et $z = 0$

3) Etude de la trajectoire.

$x = v_0.\cos \alpha .t \Rightarrow t = x / (v_0.\cos \alpha)$.

$y = - ½ g.t^2 + v_0.\sin \alpha .t + h = - ½ g.x^2 / (v_0.\cos \alpha)^2 + \tan \alpha.x + h$

La trajectoire du "poids" est donc un arc de parabole.

4) pour $\alpha = 45°$, $\cos \alpha^2 = 0,5$ et $\tan \alpha = 1$.

L'équation devient donc : $y = - ½ g.x^2 / 0,5\, v_0^2 + x + h = - g.x^2 / v_0^2 + x + h$

Si $x_P = D$, $y_P = 0$. On a donc : $0 = - g.D^2 / v_0^2 + D + h$

$g.D^2 / v_0^2 = D + h \Rightarrow v_0^2 = g.D^2 / (D+h)$

5) énergie cinétique initiale du "poids" : $Ec_0 = ½ m.v_0^2 = ½ m.g.D^2 / (D+h)$

$Ec_0 = ½ \times 4,0 \times 10 \times 18^2 / (18+2) = 20 \times 324 / 20 = 324$ J

6) $v_0 = 10\ m.s^{-1}$, $y_P = 0 = - g.D^2 / v_0^2 + D + h = - 10\, D^2 / 100 + D + 2$

$0 = - 0,1\, D^2 + D + 2$, c'est de la forme $0 = a x^2 + b x + c$

Le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 + 4 \times 0,1 \times 2 = 1,8$; $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1,8} \approx 1,3$

Les racines sont : $x_1 = (- b - \ ) / \sqrt{\Delta} 2a = (- 1 – 1,3) / (-0,1 \times 2) = 23 / 2 = 11,5$ m

$x_2 = (- b + \sqrt{\Delta}\ ) / 2a = (- 1 + 1,3)/(-0,1 \times 2) = - 3/2 = - 1,5$ m