Baccalauréat S Antilles – Guyane juin 2005

Exercice 1 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

$\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ est un repère orthonormal du plan $\mathcal{P}$.

Soit A le point d'affixe 1 ; soit B le point d'affixe -1.

Soit F l'application de $\mathcal{P}$ privé de O dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M d'affixe z distinct de O associe le point $M' = F(M)$ d'affixe $z' = \dfrac{-1}{\overline{z}}$.

1. **a.** Soit E le point d'affixe $\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$; on appelle E' son image par F. Déterminer l'affixe de E' sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.

   b. On note $\mathcal{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon 1. Déterminer l'image de $\mathcal{C}_1$ par l'application F.

2. **a.** Soit K le point d'affixe $2\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}$ et K' l'image de K par F.
   Calculer l'affixe de K'.

   b. Soit $\mathcal{C}_2$ le cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer l'image de $\mathcal{C}_2$ par l'application F.

3. On désigne par R un point d'affixe $1+\text{e}^{\text{i}\theta}$ où $\theta \in]-\pi\,;\,\pi[$. R appartient au cercle $\mathcal{C}_3$ de centre A et de rayon 1.

   a. Montrer que $z'+1 = \dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}}$.
   En déduire que : $\left|z'+1\right| = \left|z'\right|$.

   b. Si on considère maintenant les points d'affixe $1+\text{e}^{\text{i}\theta}$ où $\theta \in]-\pi\,;\,\pi[$, montrer que leurs images sont situées sur une droite. On pourra utiliser le résultat du **a.**.

Exercice 1 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste dans la division euclidienne par 9 de 7^n.

   b. Démontrer alors que $(2005)^{2005} \equiv 7\ (9)$.

2. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $(10)^n \equiv 1\ (9)$.

   b. On désigne par N un entier naturel écrit en base dix, on appelle S la somme de ses chiffres.
   Démontrer la relation suivante : $N \equiv S\ (9)$.

   c. En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.

3. On suppose que $A = (2005)^{2005}$; on désigne par :
   - B la somme des chiffres de A ;
   - C la somme des chiffres de B ;
   - D la somme des chiffres de C.

   a. Démontrer la relation suivante : $A \equiv D\ (9)$.

   b. Sachant que $2005 < 10\,000$, démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8 020 chiffres. En déduire que $B \leqslant 72\,180$.

   c. Démontrer que $C \leqslant 45$.

   d. En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 15.

   e. Démontrer que $D = 7$.

EXERCICE 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

1. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[0\,;\,1]$:

$$\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \leqslant \frac{1}{x+n} \leqslant \frac{1}{n}.$$

2. **a.** Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+n}\,\mathrm{d}x$.

b. Déduire en utilisant **1.**, que :

$$\text{pour } n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \quad (1)$$

$$\text{puis que} \quad \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}.$$

3. On appelle U la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$U(n) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

Démontrer que U est décroissante (on pourra utiliser **2. b.**.)

4. On désigne par V la suite de terme général :

$$V(n) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1).$$

Démontrer que V est croissante.

5. Démontrer que U et V convergent vers une limite commune notée γ.
Déterminer une valeur approchée de γ à 10^{-2} près par la méthode de votre choix.

EXERCICE 3 **3 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions ; chacune comporte trois réponses, une seule est exacte. On notera sur la copie uniquement la lettre correspondant â la réponse choisie.

Un lecteur d'une bibliothèque est passionné de romans policiers et de biographies.
Cette bibliothèque lui propose 150 romans policiers et 50 biographies.
40 % des écrivains de romans policiers sont français et 70 % des écrivains de biographies sont français.
Le lecteur choisit un livre au hasard parmi les 200 ouvrages.

1. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier est :

a. $0,4$ **b.** $0,75$ **c.** $\frac{1}{150}$

2. Le lecteur ayant choisi un roman policier, la probabilité que l'auteur soit français est :

a. $0,3$ **b.** $0,8$ **c.** $0,4$

3. La probabilité que Ie lecteur choisisse un roman policier français est

a. $1,15$ **b.** $0,4$ **c.** $0,3$

4. La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est :

a. $0,9$ **b.** $0,7$ **c.** $0,475$

5. La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français est :

a. $\dfrac{4}{150}$ **b.** $\dfrac{12}{19}$ **c.** $0,3$

6. Le lecteur est venu 20 fois à la bibliothèque ; la probabilité qu'il ait choisi au moins un roman policier est :

a. $1-(0,25)^{20}$ **b.** $20\times 0,75$ **c.** $0,75\times(0,25)^{20}$

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

A. Soit [KL] un segment de l'espace ; on note I son milieu. On appelle plan médiateur de [KL] le plan perpendiculaire en I à la droite (KL).
Démontrer que le plan médiateur de [KL] est l'ensemble des points de l'espace équidistants de K et L.

B. Ici l'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$; on considère les points

$$A(4\ ;\ 0\ ;\ -3),\quad B(2\ ;\ 2\ ;\ 2),\quad C(3\ ;\ -3\ ;\ -1),\quad D(0\ ;\ 0\ ;\ -3).$$

1. Démontrer que le plan médiateur de [AB] a pour équation $4x-4y-10z-13=0$.

On admet pour la suite que les plans médiateurs de [BC] et [CD] ont respectivement pour équations $2x-10y-6z-7=0$ et $3x-3y+2z-5=0$.

2. Démontrer, en résolvant un système d'équations linéaires, que ces trois plans ont un unique point commun E dont on donnera les coordonnées.

3. En utilisant la **partie A** montrer que les points A, B, C et D sont sur une sphère de centre E. Quel est le rayon de cette sphère ?