Baccalauréat ES Antilles–Guyane juin 2002

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

On rappelle que l'euro est la nouvelle monnaie en usage en France.

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du SMIC horaire converti en euros de 1995 à 2002.

Année	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
SMIC horaire en euros y_i	5,64	5,78	6,01	6,13	6,21	6,41	6,67

(Source : INSEE)

1. Calculer le pourcentage d'évolution du SMIC horaire entre les années 1995 et 2001 (le résultat sera arrondi au centième)
2. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses , 10 cm pour 1 euro sur l'axe des ordonnées ; les graduations commencent à 0 sur l'axe des abscisses et à 5 sur l'axe des ordonnées)
3. Dans cette question, les calculs effectués à la calculatrice ne seront pas justifiés et les résultats seront donnés au millième.

   Le nuage de points montre qu'un ajustement affine est justifié.

   Donner une équation de la droite de régression D de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés. Représenter la droite D dans le repère précédent.
4. Calculer, avec cet ajustement affine, le montant du SMIC horaire en euros que l'on peut prévoir en 2005 (résultat arrondi au centième)
5. On envisage un autre modèle pour prévoir l'évolution du montant du SMIC horaire. On suppose qu'à partir de l'année 2001, le SMIC horaire progressera de 2 % par an. On désigne par u_n le montant du SMIC horaire, en euros, de l'année $(2001+n)$. On a donc $u_0 = 6,67$.

   a. Calculer le montant du SMIC horaire en 2005 (résultat arrondi au centième)

   b. À partir de quelle année le SMIC horaire aura-t-il dépassé 10 euros ?

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Lors d'une enquête réalisée auprès de familles d'une région, concernant leur habitation principale, on apprend que 55 % des familles interrogées sont propriétaires de leur logement, 40 % en sont locataires et enfin 5 % occupent leur logement gratuitement (ces familles seront appelées dans la suite de l'exercice « occupant à titre gratuit ».)

Toutes les familles interrogées habitent soit une maison individuelle , soit un appartement ; toute habitation ne contient qu'une seule famille.

60 % des propriétaires habitent une maison individuelle, 80 % des locatires habitent un appartement et enfin 10 % des occupants à titre gratuit habitent une maison individuelle.

On interroge au hasard une famille de la région et on note :

A l'évènement : « la famille habite un appartement » ;

L l'évènement : « la famille est locataire » ;
P l'évènement : « la famille est propriétaire » ;
G l'évènement : « la famille est occupant à titre gratuit ».

On notera $p(\text{E})$ la probabilité de l'évènement E. L'événement contraire de E sera noté $\overline{\text{E}}$.

$p(\text{E}/\text{F})$ désignera la probabilité conditionnelle de l'évènement E par rapport à l'évènement F.

1. **a.** Préciser à l'aide de l'énoncé les probabilités suivantes : $p(\overline{\text{A}}/\text{P})$, $p(\text{A}/\text{L})$ et $p(\overline{\text{A}}/\text{G})$.

   b. Construire un arbre pondéré résumant la situation.
2. Calculer la probabilité de l'évènement : « la famille est propriétaire et habite un appartement ».
3. Montrer que la probabilité de l'évènement A est égale à 0,585
4. On interroge au hasard une famille habitant un appartement. Calculer la probabilité pour qu'elle en soit le propriétaire.
5. On interroge trois familles de la région, le choix de ces familles se faisant aléatoirement et de manière indépendante.

   Calculer la probabilité d'interroger trois familles habitant un appartement.

EXERCICE 2 — 5 points

Enseignement de spécialité

la courbe de la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln x$$

est donnée ci-après.

On considère la suite (u_n) à termes strictements positifs (admis) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 7 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array}\right.$$

Partie A

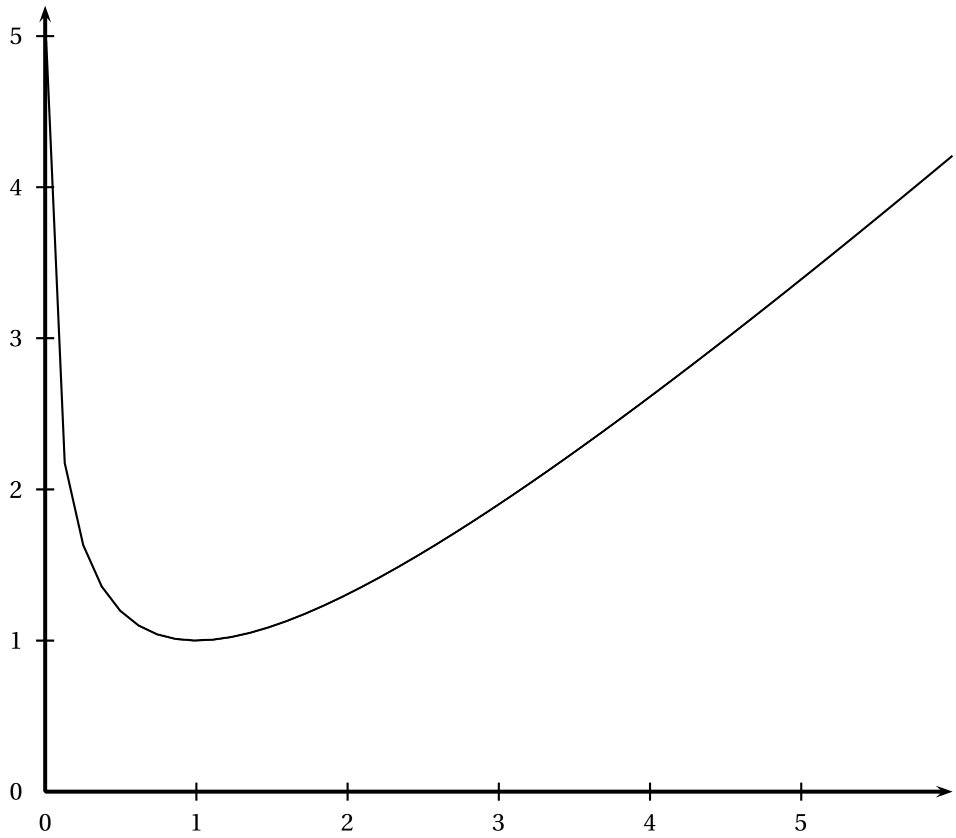
1. Au moyen du graphique donné ci-dessous, déterminer le minimum de f sur $]0\,;\,+\infty[$ et en déduire que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant 1$.
2. Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n.

   Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

Partie B

1. Construire dans le repère de la courbe $(\mathcal{C})$ donné ci-dessous la droite d'équation $y = x$.
2. En vous aidant de la droite (D), représenter sur l'axe des abscisses du graphique ci-dessous les cinq premiers termes de la suite (u_n).
3. Quelle conjecture peut-on faire en ce qui concerne la limite de la suite (u_n) ?

Graphique de f



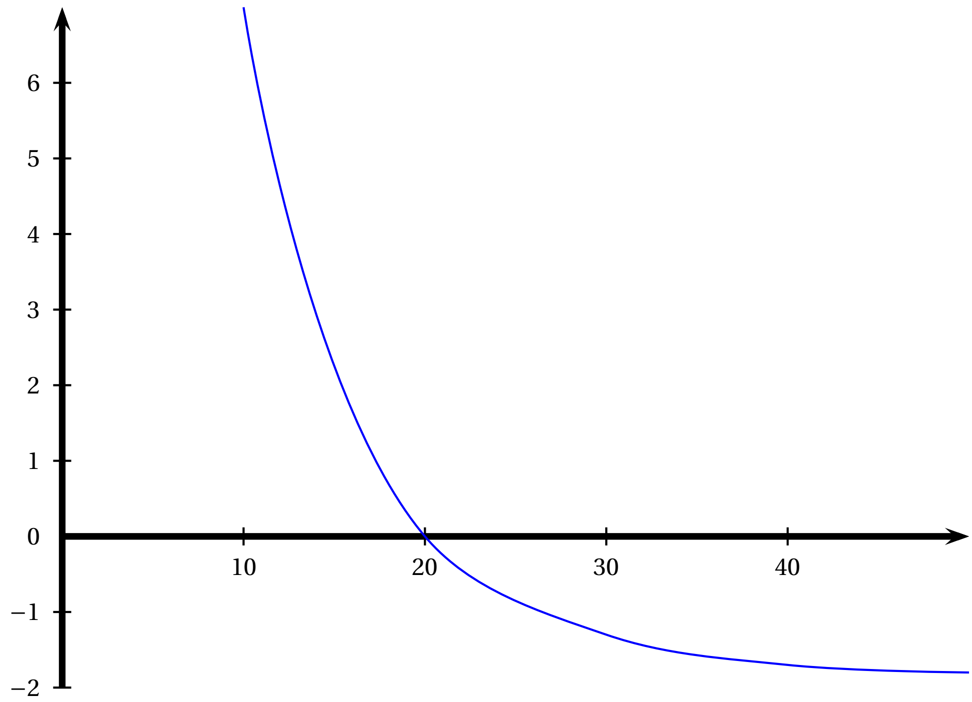
PROBLÈME **11 points**

Le but de ce problème est d'étudier des fonctions utiles pour modéliser des situations en économie : seuil de rentabilité, bénéfice maximum, etc.
On rappelle que l'euro est la nouvelle monnaie en usage en France.

Première partie

On considère la fonction g donnée sur I = [10 ; 50] par sa représentation graphique et le tableau de valeurs ci-dessous :

x	10	20	50
$g(x)$	7	0	$-1,8$



1. En utilisant les données de l'énoncé, préciser le signe de $g(x)$ sur I.

2. Soit G une primitive de g sur I.

a. Quelle est la particularité de la courbe représentative de G au point d'abscisse 20 ?

b. L'une des trois courbes données en annexe est représentative de la fonction G. Déterminer laquelle en donnat toutes les justifications.

Deuxième partie

Soit f la fonction définie sur I =[1 ; 20] par

$$f(x) = \frac{100}{x} \times (3 - \ln x).$$

1. **a.** Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f sur I.

b. Montrer que $f'(x) = \frac{100}{x} \times (\ln x - 4)$.

2. Étudier le signe de f' sur I. En déduire le tableau de variation de la fonction f.

3. Calculer $f(\mathrm{e}^3)$. En déduire le signe de f sur I.

4. Soit la fonction F définie sur I par $F(x) = -50(\ln x - 3)^2 + 30$.

a. Montrer que F est une primitive de f sur I

b. En déduire le tableau de variation de la fonction F.

5. Donner des raisons qui permettent de considérer la fonction g de la première partie comme une bonne approximation de la fonction f.

Troisième partie

La société Dumoulin, qui fournit des hangars préfabriqués pour l'industrie peut en produire jusqu'à 50 par mois.
Son bénéfice , pour q unités produites (q entier entre 10 et 50) est donné par :

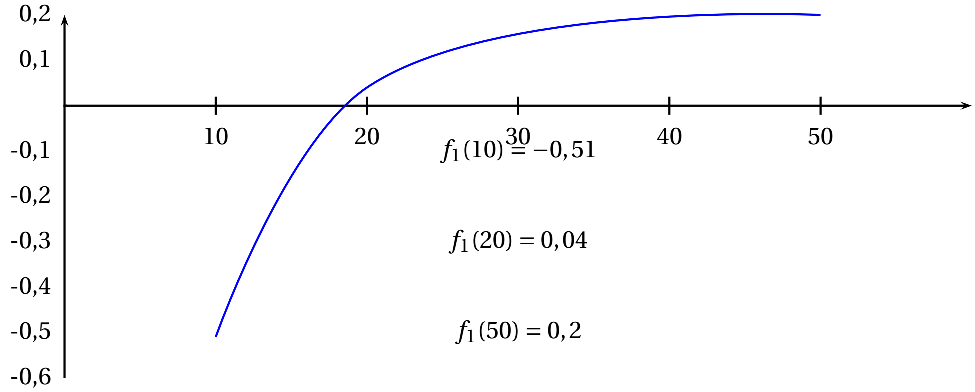
$$B(q) = -50(\ln q - 3)^2 + 30 \quad \text{en milliers d'euros.}$$

1. À partir des études précédentes, ou de la calculatrice, déterminer l'ensemble des valeurs de q qui permettent d'obtenir un résultat positif.

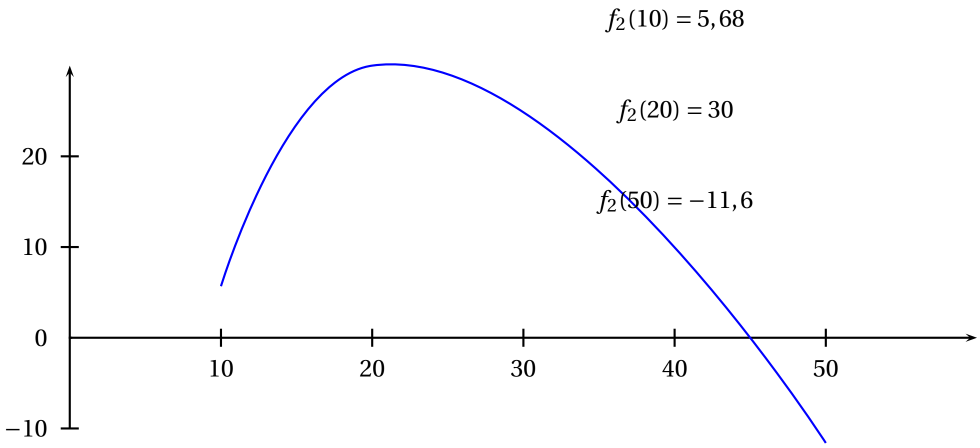
2. Déterminer la valeur de q qui permet d'obtenir un bénéfice maximum. Préciser ce bénéfice maximum.

Annexe

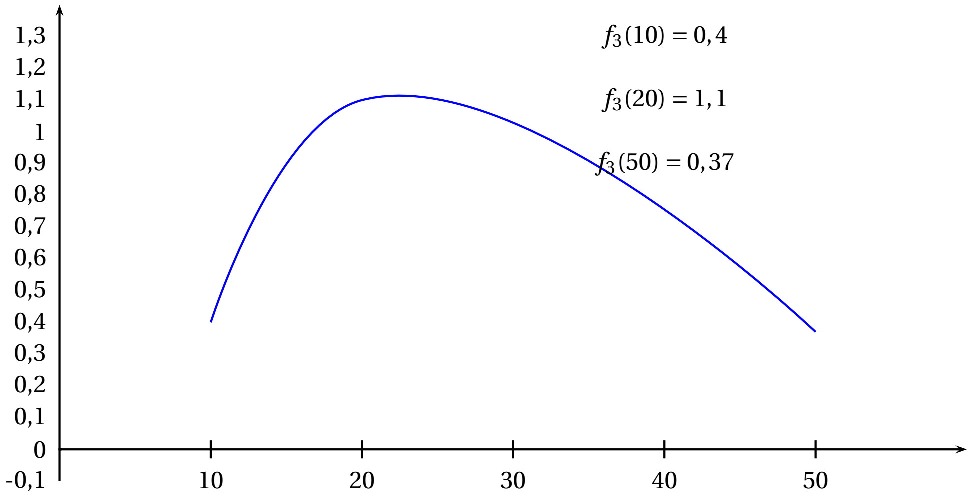
Courbe numéro 1



Courbe numéro 2



Courbe numéro 3



$f_3(10) = 0,4$
$f_3(20) = 1,1$
$f_3(50) = 0,37$
1,3
1,2
1,1
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
-0,1
10
20
30
40
50