

☞ Baccalauréat L Antilles juin 2001 ☞

EXERCICE 1

4 points

Au 1^{er} janvier 2000, l'abonnement à Internet pour un forfait de 20 heures était proposé par une société au tarif de 90 F par mois.

Le tarif est révisé au 1^{er} janvier de chaque année.

On note P_n le prix mensuel (non arrondi) de l'abonnement en francs, au 1^{er} janvier de l'année $(2000 + n)$.

P_0 est donc égal à 90.

Une étude de marché envisage 3 scénarii d'évolution de ce prix.

On donnera tous les résultats demandés arrondis au centime.

Question 1 : Premier scénario

Le prix mensuel de l'abonnement subit une diminution de 10 % chaque année.

a. Calculer P_1 et P_2 .

b. Exprimer le terme général P_n en fonction de n et calculer P_{10} .

Question 2 : Deuxième scénario

On prend comme hypothèse que la suite (P_n) est arithmétique.

Calculer alors P_{10} sachant que P_1 est égal à 85.

Question 3 : Troisième scénario

On suppose que la suite (P_n) vérifie pour tout entier naturel n la relation suivante

$$P_{n+1} = 0,8P_n + 6.$$

a. Calculer P_1 et P_2 .

b. La suite (U_n) est définie pour tout entier naturel n par $U_n = P_n - 30$.

Montrer que (U_n) est une suite géométrique de raison 0,8.

c. En déduire P_n en fonction de n et calculer P_{10} .

Question 4 :

Quel scénario conduit à l'abonnement mensuel le moins cher en 2010 ?

EXERCICE 2

5 points

Une urne contient 4 boules en or et 3 boules en acier indiscernables au toucher.

Un joueur tire au hasard simultanément 3 boules dans cette urne.

Les probabilités demandées seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. Soit O l'évènement : « le candidat tire 3 boules en or ».

Déterminer la probabilité $p(O)$ de cet évènement.

2. Dans cette question, chaque boule en or rapporte 100 F, chaque boule en acier rapporte 10 F.

Soit X la variable aléatoire qui désigne le gain d'un tirage.

a. Quelles sont les valeurs possibles de X ?

b. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

c. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$. Donner l'espérance de gain arrondie au franc.

3. Dans cette question :

• Si le joueur tire 3 boules en or, il gagne 1000 F puis il doit répondre à une question.

S'il donne la bonne réponse, il double son gain sinon il repart avec 1000 F.

On estime que le candidat a 7 chances sur 10 de donner la bonne réponse.

• Si le joueur ne tire pas 3 boules en or, il ne gagne rien.

a. Calculer la probabilité pour que le candidat gagne 2000 F.

- b. La probabilité pour que le joueur gagne 1000 F étant égale à $\frac{6}{175}$ (on ne demande pas de le vérifier), calculer l'espérance de gain dans cette question. On arrondira le résultat au franc.

PROBLÈME**11 points**

Les deux tracés demandés en partie I question 6. et en partie II question 4. seront effectués sur des figures séparées. On prendra un repère orthonormal, l'unité graphique étant 1 cm.

Partie I

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{8x}{x^2 + 4}.$$

On désigne par (\mathcal{C}) la courbe représentative de f .

1. Montrer que l'origine du repère est centre de symétrie de la courbe (\mathcal{C}) .
2.
 - a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 - b. En déduire que la courbe (\mathcal{C}) admet une asymptote au voisinage de $+\infty$.
 - c. Étudier la position de la courbe (\mathcal{C}) par rapport à cette asymptote pour les points d'abscisses positives.
3.
 - a. Montrer que pour tout réel x on a $f'(x) = \frac{8(4 - x^2)}{(x^2 + 4)^2}$.
 - b. Étudier le sens de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
4.
 - a. Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (\mathcal{C}) au point d'abscisse 0.
 - b. Montrer que pour tout réel x strictement positif on a : $f(x) < 2x$.
 - c. En déduire la position de la courbe (\mathcal{C}) par rapport à la droite (T) pour les points d'abscisse positives.
5. Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe (\mathcal{C}) et de la droite d'équation $y = 1$ puis en donner les valeurs arrondies au centième.
6. Tracer la droite (T) et la courbe (\mathcal{C}) .

Partie II

Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$F(x) = 4 \ln \left(\frac{x^2 + 4}{4} \right).$$

1. Calculer la limite de F en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Montrer que F est la primitive de f qui s'annule en 0.
En déduire les variations de la fonction F sur $[0 ; +\infty[$.
3. Montrer que l'équation $F(x) = 1$ admet une solution unique α dont on donnera une approximation au centième près.
4. Construire la représentation graphique de la fonction F sur \mathbb{R} et placer le réel α .
5. Soit \mathcal{A} l'aire de la surface limitée par la courbe (\mathcal{C}) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.
Calculer \mathcal{A} , puis en donner une valeur approchée au centième près.