Durée : 3 heures

Baccalauréat L Antilles juin 2002

EXERCICE 1 OBLIGATOIRE **7 points**

Les trois parties de l'exercice sont indépendantes. Les résultats demandés seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Dans cet exercice, on effectue selon différentes modalités, des tirages au hasard parmi les huit cartes que constituent les quatre dames et les quatre rois d'un jeu de cartes.

Préliminaire :

Écrire le triangle de Pascal donnant les nombres $\binom{n}{p}$ pour n inférieur ou égal à 8.

I - Première modalité

On tire simultanément au hasard trois cartes parmi les huit cartes.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. Déterminer le nombre de tirages qui comprennent trois rois.
3. Déterminer la probabilité de réaliser, un tirage de trois cartes de même niveau, c'est-à-dire trois rois ou trois dames.

II. Deuxième modalité : *on pourra s'aider d'un arbre.*

On tire successivement au hasard deux cartes parmi les huit cartes. Le tirage est sans remise.

1. Calculer la probabilité de l'événement R_1 « La première carte tirée est un roi ».
2. Sachant que la première carte tirée est un roi, calculer la probabilité d'obtenir encore un roi pour la deuxième carte.
3. Déterminer la probabilité d'obtenir deux rois.
4. Quelle est la probabilité d'obtenir deux figures de même niveau, c'est-à-dire deux rois ou deux dames ?
5. Quelle est la probabilité de ne pas obtenir deux figures de même niveau ?

III. Troisième modalité

On tire une carte que l'on remet dans le paquet de huit cartes avant d'effectuer le tirage suivant. Les tirages sont indépendants.

1. Calculer la probabilité d'obtenir un c ?ur quand on tire une carte parmi les huit choisies.
2. On effectue quatre tirages successifs.
   - **a.** Déterminer la probabilité p_1 d'obtenir quatre fois un coeur.
   - **b.** Déterminer la probabilité p_2 d'obtenir exactement deux fois un coeur.
3. À l'aide de la calculatrice, donner le nombre de tirages nécessaires pour que la probabilité de n'obtenir que des c ?urs soit inférieure à 10^{-6}.

EXERCICE 2 OBLIGATOIRE **6 points**

Partie A

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{10}x^3 - 6x^2 + 120x \qquad ; \qquad g(x) = 40x.$$

1. **a.** Calculer le nombre dérivé $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \frac{3}{10}(x-20)^2$.

b. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

c. Calculer $f(10)$, $f(20)$ et $f(40)$.

2. La courbe $(\mathscr{C}_f)$ représentative de la fonction f est tracée sur la feuille annexe que l'on remettra avec la copie.

a. Déterminer une équation de la tangente T_A à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point A d'abscisse 10.

b. Tracer sur la feuille annexe la courbe $(\mathscr{C}_g)$ représentative de la fonction g.

c. Montrer que la courbe $(\mathscr{C}_f)$, la courbe $(\mathscr{C}_g)$ et la droite T_A se coupent au point d'abscisse 40. En déduire le tracé de la tangente T_A que l'on réalisera sur la feuille annexe.

Partie B

Le coût exprimé en euros d'une production est fonction du nombre d'unités x fabriquées est égal à $f(x)$ où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.
On prendra x dans l'intervalle $[0\,;45]$.

1. Montrer que pour x unités produites et vendues 40 euros l'unité, le bénéfice en euros s'exprime par $g(x) - f(x)$.

2. **a.** Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sur l'intervalle $[0\,;45]$.

On fera les traits de construction utiles et on vérifiera que les valeurs entières lues sont solutions.

b. Déterminer l'intervalle auquel doit appartenir le nombre d'unités fabriquées x pour que l'entreprise soit bénéficiaire.

AU CHOIX exercice 3 ou exercice 4

EXERCICE 3 **6 points**

Dans cet exercice, les deux parties sont indépendantes. Les résultats demandés seront arrondis au centième.
Pour effectuer un achat dont le coût s'élève à 1 600 euros un client a le choix entre deux formes de paiement.
I. Dans cette question, le premier versement s'élève à 150 euros et on effectue une suite de versement notée (a_n) qui vérifie $a_0 = 150$ et, pour tout entier n : $a_{n+1} = 0,95a_n + 100$.

1. Calculer le deuxième versement a_1 et le troisième a_2.

2. Montrer qu'avec cinq versements, la somme de 1600 euros est remboursée.

II. Dans cette question, le premier versement s'élève à 200 euros, puis chaque versement est égal au précédent diminué de 5 %.
On note (b_n) la suite des versements avec $b_0 = 200$.

1. Vérifier que $b_1 = 190$ et calculer b_2 et b_3

2. Exprimer le terme b_{n+1} en fonction de b_n.

En déduire la nature de la suite (b_n) et donner l'expression du terme général b_n en fonction de n.

3. Calculer en fonction de n la somme S_n égale à $b_0 + b_1 + \cdots + b_n$ des $(n+1)$ premiers versements.

Calculer les sommes S_8 et S_9 et interpréter le résultat.

EXERCICE 4 **6 points**

1. **a.** Montrer que 1999 est congru à 4 modulo 7.
   b. Déterminer le plus petit nombre entier naturel congru à 2007 modulo 7.
2. Soit n un nombre entier naturel congru à 5 modulo 7.
   a. Déterminer un nombre entier naturel congru à n^3 modulo 7.
   b. En déduire que $\left(n^3+1\right)$ est divisible par 7.
3. Montrer que si n est un nombre entier naturel congru à 4 modulo 7 alors $\left(n^3-1\right)$ est divisible par 7.
4. On considère le nombre $A = 1999^3 + 2007^3$.
   Sans calculer A, montrer en utilisant les résultats précédents que A est divisible par 7.

Annexe à rendre avec la copie