

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On répète n fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis la remettre dans l'urne ; on suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants.
On note p_n , la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des $n - 1$ premiers tirages et une boule blanche lors du n -ième tirage.

1. Calculer les probabilités p_2 , p_3 et p_4 .
2. On considère les événements suivants :
 B_n : « On tire une boule blanche lors du n -ième tirage »,
 U_n : « On tire une boule blanche et une seule lors des $n - 1$ premiers tirages ».
 - a. Calculer la probabilité de l'évènement B_n .
 - b. Exprimer la probabilité de l'évènement U_n en fonction de n .
 - c. En déduire l'expression de p_n en fonction de n et vérifier l'égalité :

$$p_n = \frac{n-1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

3. On pose : $S_n = p_2 + p_3 + \dots + p_n$.
 - a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$S_n = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

- b. Déterminer la limite de la suite (S_n) .

EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$4z^2 - 12z + 153 = 0.$$

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , d'unité graphique

1 cm on considère les points A, B, C, P d'affixes respectives : $z_A = \frac{3}{2} + 6i$, $z_B = \frac{3}{2} - 6i$; $z_C = -3 - \frac{1}{4}i$, $z_P = 3 + 2i$ et le vecteur \vec{w} d'affixe $z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}i$.

- a. Déterminer l'affixe z_Q du point Q, image du point B dans la translation t de vecteur \vec{w} .
 - b. Déterminer l'affixe z_R du point R, image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$.

- c. Déterminer l'affixe z_S du point S, image du point P par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
Placer les points P, Q, R et S.
3. a. Démontrer que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.
- b. Calculer $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$.
En déduire la nature précise du parallélogramme PQRS.
- c. Justifier que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle, noté \mathcal{C} . On calculera l'affixe de son centre Ω et son rayon ρ .
4. La droite (AP) est-elle tangente au cercle \mathcal{C} ?

Exercice 2**5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur \mathbb{N} par :

$$\begin{aligned} x_0 &= 3 & \text{et} & & x_{n+1} &= 2x_n - 1 \\ y_0 &= 1 & \text{et} & & y_{n+1} &= 2y_n + 3. \end{aligned}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $x_n = 2^{n+1} + 1$.
2. a. Calculer le pgcd de x_8 et x_9 , puis celui de x_{2002} et x_{2003} . Que peut-on en déduire pour x_8 et x_9 d'une part, pour x_{2002} et x_{2003} d'autre part?
b. x_n et x_{n+1} sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ?
3. a. Démontrer que pour tout entier naturel n , $2x_n - y_n = 5$.
b. Exprimer y_n en fonction de n .
c. En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel p le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.
d. On note d_n le pgcd de x_n et y_n pour tout entier naturel n .
Démontrer que l'on a $d_n = 1$ ou $d_n = 5$; en déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.

PROBLÈME**11 points****Commun à tous les candidats****Partie A Étude d'une fonction auxiliaire g**

La fonction g est définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 2e^x + 2x - 7$.

1. Étudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur \mathbb{R} et dresser son tableau de variations.
3. Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet dans \mathbb{R} une solution unique α telle que :

$$0,94 < \alpha < 0,941.$$

4. Étudier le signe de g sur \mathbb{R} .

Partie B Étude d'une fonction

La fonction f est définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x}).$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Étudier le signe de f sur \mathbb{R} .
2. Étudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Calculer $f'(x)$, ou f' désigne la fonction dérivée de f et vérifier que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
Dresser le tableau de variations de f .
4. a. Démontrer l'égalité: $f(\alpha) = \frac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}$.
b. Étudier le sens de variations de la fonction $h : x \mapsto \frac{(2x - 5)^2}{2x - 7}$ sur l'intervalle $\left] -\infty ; \frac{5}{2} \right[$.
En déduire, à partir de l'encadrement de α obtenu dans la **partie A**, un encadrement d'amplitude 10^{-2} de $f(\alpha)$.
5. Démontrer que la droite \mathcal{D} , d'équation $y = 2x - 5$, est asymptote à \mathcal{C} en $+\infty$.
Préciser la position de \mathcal{C} par rapport à \mathcal{D} .
6. Tracer la droite \mathcal{D} et la courbe \mathcal{C} dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité graphique 2 cm).

Partie C - Calcul d'aires

À l'aide d'une intégration par parties, calculer en cm^2 l'aire \mathcal{A} de la portion de plan délimitée par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \frac{5}{2}$.

Partie D - Étude d'une suite de rapports de distances

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on considère les points A_n , B_n , et C_n d'abscisse n , appartenant respectivement à l'axe des abscisses, la droite \mathcal{D} et la courbe \mathcal{C} ; soit u_n le réel défini par :

$$u_n = \frac{C_n B_n}{A_n B_n}.$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$u_n = \frac{2n - 5 - f(n)}{2n - 5}.$$

2. a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
b. Calculer la limite de la suite (u_n) . Pouvait-on prévoir ce résultat?