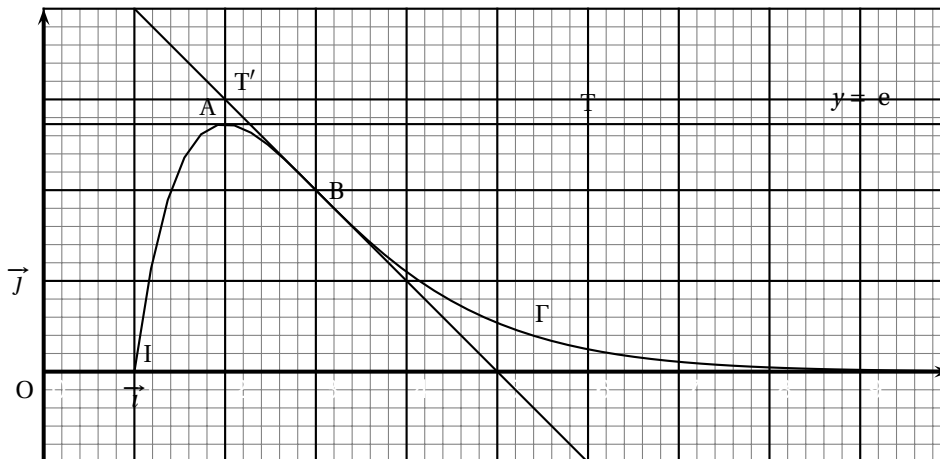


EXERCICE 1

6 points

Commun à tous les candidats

Sur le document ci-dessous, le graphique est celui de la courbe Γ représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$.



La courbe Γ passe par les points $I(1; 0)$, $A(2; e)$ et $B(3; 2)$ où : $e = \exp(1)$. La droite T est tangente à Γ au point A et elle est parallèle à l'axe des abscisses.

La droite T' est tangente à Γ en B et elle passe par le point de coordonnées $(5; 0)$.

La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

L'axe des abscisses est asymptote à la courbe Γ .

1. À l'aide d'une lecture graphique :
 - a. Donner les valeurs de $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, puis de $f'(2)$ et $f'(3)$, où f' désigne la fonction dérivée de f .
 - b. Déterminer une équation de la droite T' .
 - c. Donner la limite de f en $+\infty$.
 - d. Dresser le tableau de variations de f ; donner le signe de f sur l'intervalle $[1; +\infty[$.
2. La fonction g est définie, pour tout x de l'intervalle $[1; +\infty[$, par $g(x) = \ln(f(x))$.
 - a. Donner les valeurs de $g(2)$, $g(3)$, puis de $g'(2)$ et $g'(3)$, où g' désigne la fonction dérivée de g .
 - b. Déterminer les limites de g en 1 et en $+\infty$.
 - c. Dresser en le justifiant le tableau de variations de g sur l'intervalle $[1; +\infty[$.
 - d. En utilisant la courbe représentative Γ de la fonction f , donner une valeur approchée des solutions de l'équation $g(x) = 0$.

EXERCICE 2

5 points

Enseignement obligatoire

Un jeu de société est composé d'un grand nombre de fiches qui proposent chacune trois questions indépendantes : la première porte sur la géographie, la seconde sur l'histoire et la troisième sur les arts. À tour de rôle, chaque joueur tire une fiche au hasard et doit répondre aux trois questions dans l'ordre où elles sont proposées. Le meneur de jeu remplit un bulletin réponse :

G	H	A

dans lequel, pour chaque question, il reporte F si la réponse est fausse, J si elle est juste. Ainsi, si le joueur a bien répondu aux questions sur la géographie et sur les arts, mais n'a pas trouvé la bonne réponse à la question sur l'histoire, le bulletin réponse à cette fiche sera :

G	H	A
J	F	J

Le résultat sera noté : JFJ.

1.
 - a. Donner la liste des huit résultats différents que l'on peut obtenir pour une fiche.
 - b. À chaque bulletin réponse est attribuée une note : une réponse juste, J, fait gagner 5 points ; une réponse fausse ou l'absence de réponse, F, fait perdre 2 points.
Donner la liste des résultats qui conduisent à un total de 8 points.
2. La probabilité que Marc donne la réponse juste à une question, qu'elle soit sur la géographie, sur l'histoire ou sur les arts, est de 0,6.
Marc tire une fiche et répond aux trois questions.
 - a. Quelle est la probabilité que Marc obtienne le bulletin réponse cité en exemple ci-dessus ?
 - b. Montrer que la probabilité que son bulletin réponse conduise à une note de 8 points est 0,432.
3. On appelle X la variable aléatoire égale à la note obtenue par Marc pour un bulletin réponse.
 - a. Préciser toutes les valeurs (positives ou non) prises par X .
 - b. Établir la loi de probabilité de X .
 - c. Calculer l'espérance mathématique de X .

EXERCICE 2

5 points

Enseignement de spécialité

Maud vise une cible avec une fléchette. La probabilité qu'elle atteigne la cible est $\frac{2}{3}$.
Les résultats des lancers successifs sont supposés indépendants.

1. Si Maud effectue cinq lancers successifs, quelle est la probabilité qu'elle atteigne exactement deux fois la cible ?
2. Maud et Paul décident de jouer des billes avec la règle du jeu suivante :
 - Maud mise des billes puis lance une fléchette.
 - Avant le premier lancer, Maud mise une bille.
 - À chaque lancer :
 - si elle rate la cible, elle perd sa mise que Paul récupère ; le jeu continue ; elle triple sa mise avant de lancer une nouvelle fléchette ;
 - si elle atteint la cible, elle récupère sa mise et Paul lui donne autant de billes que ce qu'elle vient de miser ; le jeu s'arrête.
 On suppose dans cette question que le jeu n'est pas limité par le nombre de billes.
 - a. Soit a_n la mise de Maud avant le $n + 1$ i-ème lancer. Ainsi $a_0 = 1$, $a_1 = 3$.
Donner les valeurs de a_2 et a_3 .
Quelle est la nature de la suite (a_n) ?
En déduire la valeur de a_n en fonction de n .

- b. Maud a raté la cible aux n premiers lancers : elle a donc perdu les mises a_0, a_1, \dots, a_{n-1} .

Montrer qu'elle a perdu $\frac{1}{2}(3^n - 1)$ billes depuis le début du jeu.

3. Lorsque Maud et Paul commencent le jeu défini dans le 2), ils ont chacun 160 billes.
- a. Si Maud perd à toutes les parties successives, quel est le nombre k maximum de lancers qu'elle peut effectuer ?
- b. Quelle est la probabilité que cette situation se réalise et que Maud atteigne la cible au k -ième lancer ?

PROBLÈME

10 points

Partie A

Le document ci-après est à compléter et à rendre avec la copie.

La fonction h est définie sur l'intervalle $[0; 8]$ par :

$$h(x) = x^2 + \frac{16x}{2x+1} - 8\ln(2x+1).$$

- Montrer que : $h'(x) = \frac{2x(2x+5)(2x-3)}{(2x+1)^2}$, h' désignant la fonction dérivée de h sur l'intervalle $[0; 8]$.
- Étudier les variations de h sur l'intervalle $[0; 8]$.
- Montrer que l'équation $h(x) = 0$ a une solution unique α dans l'intervalle $\left[\frac{3}{2}; 8\right]$.
Déterminer une valeur approchée de α arrondie à 0,01 près.
- Déduire des résultats précédents le signe de h sur l'intervalle $[0; 8]$.

Partie B

La fonction M est définie sur l'intervalle $[0; 8]$ par :

$$M(x) = x + \frac{8}{2x+1}.$$

La fonction C_T est la primitive de la fonction M sur l'intervalle $[0; 8]$ qui s'annule pour $x = 0$. Calculer $C_T(x)$.

Partie C

Une entreprise produit une quantité variable x d'appareils (x est exprimé en milliers d'appareils) dont le coût marginal M est la fonction définie dans la **partie B**. Dans la suite du problème, tous les coûts seront exprimés en milliers de francs.

On modélise le coût total de production de x milliers d'appareils, pour x appartenant à $\left[\frac{1}{4}; 8\right]$ par la fonction C_T définie dans la **partie B**.

- a. Vérifier que le coût moyen, par millier d'appareils, est défini sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}; 8\right]$ par :

$$C_m(x) = x + 4 \frac{\ln(2x+1)}{x}.$$

- b. Calculer $C'_m(x)$, où C' désigne la fonction dérivée de C .
- c. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $\left[\frac{1}{4}; 8\right]$, $C'_m(x) = \frac{h(x)}{2x^2}$, où h est la fonction étudiée dans la **partie A.**
- d. Étudier les variations de la fonction C_m , et dresser son tableau de variations.
2. a. Pour quelle production, arrondie à la dizaine près, le coût moyen, par millier d'appareils, est-il minimum ?
- b. Vérifier que, pour cette valeur approchée de la production, le coût moyen et le coût marginal ont la même valeur, à 5 francs près.
3. Le graphique donné ci-après est celui de la courbe \mathcal{C} représentative de la fonction M dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , où 2 cm représentent 1 000 appareils sur l'axe des abscisses et 2 cm représentent 1 000 F sur l'axe des ordonnées.
- a. On note \mathcal{C}' la courbe représentative de la fonction C_m dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) précédent. Tracer la courbe \mathcal{C}' sur le document donné ci-après.
- b. Par une lecture graphique que l'on expliquera, retrouver le résultat de la question 2. b..

