Baccalauréat ES Liban juin 2002

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 4 cm), la courbe $\mathcal{C}$ donnée ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. La courbe $\mathcal{C}$ admet pour asymptotes les axes de coordonnées, passe par le point A(1 ; 0), par le point $\text{B}\left(\sqrt{\text{e}}\ ;\ \dfrac{1}{2\text{e}}\right)$ et elle admet au point B une tangente horizontale.

1. En utilisant ces renseignements et une lecture graphique :

a. Donner le tableau de variations de f avec le signe de la dérivée et les limites aux bornes de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

b. Donner le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

2. On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

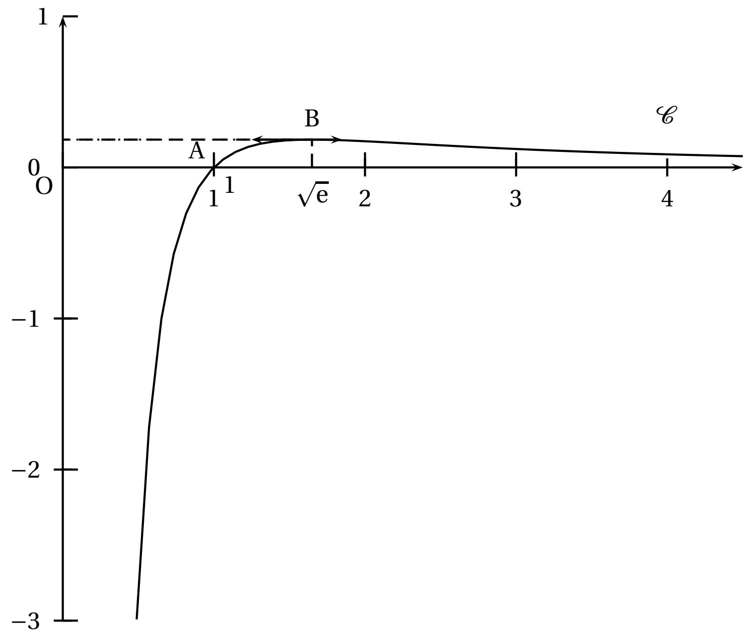
$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

a. Montrer que, pour tout réel x strictement positif, on a

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}.$$

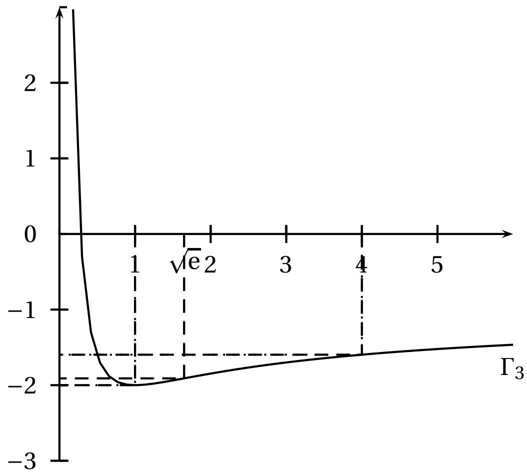
où f' désigne la fonction dérivée de f.

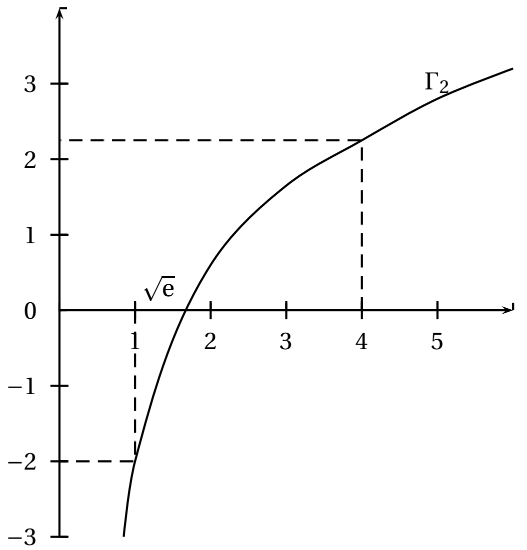
b. Étudier les variations de f.

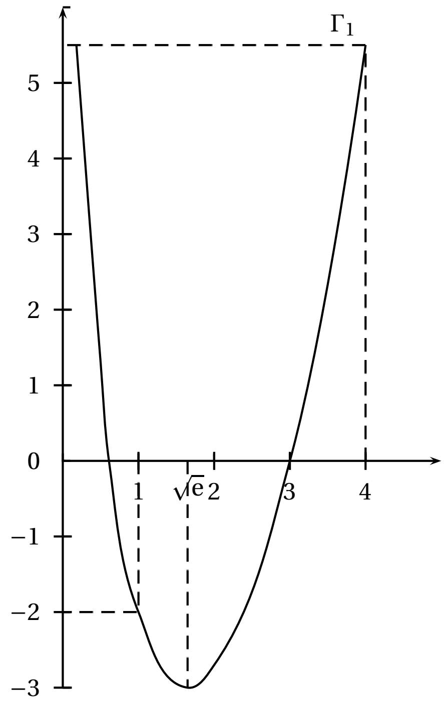


3. Soit F la primitive de f qui prend la valeur -2 en 1. La représentation graphique de F est l'une des trois courbes Γ_1, Γ_2, Γ_3 données ci-après, dans un repère orthonormal (unités graphique : 1 cm.)

Déterminer celle des courbes Γ_1, Γ_2, Γ_3 qui représente F, en. justifiant la réponse.


2
1
0
−1
−2
−3
1
$\sqrt{e}$
2
3
4
5
Γ_3


3
2
1
0
−1
−2
−3
1
$\sqrt{e}$
2
3
4
5
Γ_2



4. On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire du domaine plan limite par :
 - la courbe $\mathscr{C}$,
 - l'axe des abscisses,
 - les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$.

 a. Exprimer $\mathscr{A}$, en unités d'aire, à l'aide de la fonction F.

 b. Utiliser la représentation graphique de F pour donner une valeur approchée de $\mathscr{A}$, à 10^{-1} près, en cm^2.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Dans une entreprise, les salariés sont classés en deux catégories : cadres et employés. Une entreprise emploie 30 cadres et 240 employés. Au cours de négociations sur la réduction du temps de travail, dite RTT, on propose aux salariés trois formules :

- Formule n$^{\text{o}}$ 1 : une RTT de 30 minutes par jour de travail,
- Formule n$^{\text{o}}$ 2 : une RTT d'un vendredi après-midi sur deux,
- Formule n$^{\text{o}}$ 3 : une RTT de 12 jours de travail par an.

Une enquête a été réalisée auprès de tous les salariés de l'entreprise, chacun remplissant une fiche mentionnant son statut (cadre ou employé) et son choix de RTT. On a obtenu les résultats suivants :

- Aucun cadre n'a choisi la formule n$^{\text{o}}$ 1,
- Parmi les employés :
 36 ont choisi la formule n$^{\text{o}}$ 1,
 99 ont choisi la formule n$^{\text{o}}$ 2,
- 40 % des salariés ont choisi la formule n$^{\text{o}}$ 2.

On extrait, au hasard, la fiche d'un salarié. On notera :

C l'évènement « le salarié est un cadre »,
E l'évènement « le salarié est un employé »,
R1 l'évènement « le salarié a choisi la formule n° 1 »,
R2 l'évènement « le salarié a choisi la formule n° 2 »,
R3 l'évènement « le salarié a choisi la formule n° 3 ».

$p(\text{A})$ désigne la probabilité d'un évènement A et $p_{\text{B}}(\text{A})$ celle de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé. Les probabilités seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. Déterminer les probabilités $p(\text{C})$ et $p(\text{E})$.
2. Parmi les probabilités $p(\text{R1} \cap \text{C})$, $p(\text{R1} \cap \text{E})$, $p(\text{R2} \cap E)$, $p_{\text{E}}(\text{R1})$, $p_{\text{E}}(\text{R2})$, $p(\text{R2})$ indiquer celles qui correspondent aux quatre résultats du sondage et donner leur valeur numérique.
3. **a.** Calculer la probabilité que le salarié soit un cadre ayant choisi la formule n$^{\text{o}}$ 2.
   b. Démontrer que la probabilité que le salarié ait choisi la formule n$^{\text{o}}$ 2, sachant qu'il s'agit d'un cadre, est $\dfrac{3}{10}$.
4. Calculer la probabilité $p(\text{R1})$, puis la probabilité $p(\text{R3})$.

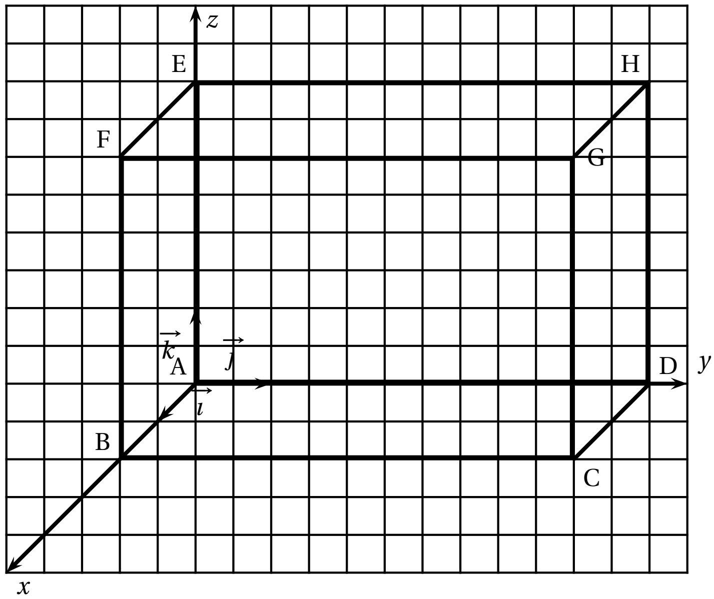
EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

L'espace est rapporte à un repère orthonormal $\left(\text{A}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

ABCDEFGH est un pavé défini par $\overrightarrow{\text{AB}} = 2\vec{\imath}$; $\overrightarrow{\text{AD}} = 6\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{\text{AE}} = 4\vec{k}$.
I, J et K sont les milieux respectifs de [EF], [FB] et [AD]

1. Placer les points I, J et K sur la figure donnée ci-dessous. Donner les coordonnées des points B, D et E. Puis vérifier par le calcul que I, J et K ont pour coordonnées respectives $(1\,;0\,;4)$, $(2\,;0\,;2)$ et $(0\,;3\,;0)$.
2. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $y = 0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $2x + z = 6$.
   a. Donner un vecteur $\vec{n}_1$ normal au plan $\mathscr{P}_1$ et un vecteur $\vec{n}_2$ normal au plan $\mathscr{P}_2$.
   b. En déduire que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.
   c. Soit Δ l'intersection des deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
   Montrer que Δ est la droite (IJ).
3. Soit $\vec{n}\,(2\,;2\,;1)$.
   a. Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{\text{IJ}}$ et $\overrightarrow{\text{IK}}$
   b. En déduire que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (IJK).
   c. Montrer alors que le plan (IJK) a pour équation $2x + 2y + z = 6$.
4. On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $5x + y = 5$.
   a. Déterminer les coordonnées des points R et T, intersections du plan $\mathscr{P}$ avec les axes $(\text{A}x)$ et $(\text{A}y)$ respectivement.
   b. Vérifier que le point I appartient au plan $\mathscr{P}$.
   c. Sur la figure, placer les points R et T, puis dessiner la trace du plan $\mathscr{P}$ sur le plan $(x\text{A}y)$.



PROBLÈME **10 points**

Le taux de pénétration au radiotéléphone pour la France est donné par le tableau suivant :

Semestre/Année	1/95	2/95	1/96	2/96	1/97	2/97	1/98
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6
Taux y_i	1,4	2,0	2,7	4,0	6,0	9,9	12,9

Semestre/Année	2/98	1/99	2/99	1/00	2/00	1/01
Rang x_i	7	8	9	10	11	12
Taux y_i	18,7	24,4	33,9	39,9	48,7	54,2

(Source : Autorité de régulation des télécommunications)

Dans la première ligne du tableau, 1/95 désigne le 1$^{\text{er}}$ semestre 1995 et 2/95 le 2$^{\text{e}}$ semestre 1995. Dans la troisième ligne du tableau, un taux de 2,0, par exemple, indique que 2 personnes sur 100 sont équipées d'un radiotétéphone. On propose d'étudier deux modèles d'ajustement dans les **parties A et B** et de comparer les prévisions pour les années à venir dans la **partie C**.

Partie A - Ajustement affine (modèle A)

Dans cette partie, aucun détail des calculs statistiques n'est demandé.

1. Représenter graphiquement le nuage de points associés à la série statistique (xi ; yj) dans un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm pour un semestre sur l'axe des abscisses et 1 cm pour un taux de 5% sur l'axe des ordonnées) (on prendra la feuille de papier millimétré dans le sens de la largeur). Le nuage de points montre qu'un ajustement affine est justifié.

2. Écrire une équation de la droite d'ajustement affine $\mathcal{D}$ de y en x par la méthode des moindres carrés ; les coefficients seront arrondis à 10^{-2} près.

3. Tracer la droite $\mathcal{D}$ sur le graphique.

Partie B - Ajustement à l'aide d'une fonction (modèle B)

On obtient un autre ajustement du nuage à l'aide de la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{80}{1+56\mathrm{e}^{-0,4x}}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g.

1. Étudier le sens de variations de g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Calculer la limite de g en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.
3. Construire, dans le repère précédent, la partie de la courbe $\mathscr{C}$ obtenue sur l'intervalle $[0\,;25]$.

Partie C

Avec le modèle A, on note f la fonction affine représentée par la droite D.
Avec le modèle B, si x est l'entier désignant la durée écoulée en nombre de semestres depuis le 1$^{\text{er}}$ semestre 1995, alors $g(x)$ représente le taux de pénétration au radiotéléphone correspondant à ce nombre de semestres.

1. Prévoir le taux de pénétration au radiotéléphone, à 10^{-1} près, pour chacun des deux modèles précédents :

   a. pour le deuxième semestre 2002.

   b. pour le deuxième semestre 2004.

2. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux inéquations suivantes :

   $$f(x) \geqslant 65 \qquad \text{et} \qquad g(x) \geqslant 65.$$

   b. En déduire le plus petit entier n tel que $f(n) \geqslant 65$ et le plus petit entier p tel que $g(p) \geqslant 65$.

   c. Interpréter les résultats obtenus.

3. Calculer $f(24)$. Commenter le résultat obtenu.
4. En supposant que le modèle B soit valide à long terme, et en utilisant les questions **B. 1.** et **B. 2.**, que peut-on déduire pour le taux de pénétration au radiotéléphone pour les années à venir ?