

☺ Baccalauréat L Liban juin 2002 ☺

Les exercices 1 et 2 sont obligatoires. Le troisième exercice est à choisir parmi les exercices 3 et 4.

EXERCICE 1

7 points

Dans une classe composée de dix filles et huit garçons, on forme des groupes en choisissant au hasard trois élèves.

1. Quel est le nombre de groupes possibles ?
2. Déterminer
 - a. la probabilité pour que les trois élèves choisis soient trois filles,
 - b. la probabilité pour que l'un au moins des huit garçons soit choisi.Ces deux résultats seront donnés sous forme de fraction simplifiée.
3. Montrer que la probabilité pour que le groupe soit mixte (c'est-à-dire comprenne au moins une fille et au moins un garçon) est égale à $\frac{40}{51}$.
4. On forme un tel groupe de trois élèves, lors de chacun des trois trimestres de l'année scolaire, par tirage au sort. Un même élève peut être donc désigné plusieurs fois.
Calculer à 0,001 près, la probabilité pour qu'au cours d'une année scolaire, il y ait exactement deux groupes mixtes parmi les trois formés.

EXERCICE 2

7 points

Un rectangle ABCD a pour périmètre 10 cm.

Partie A

Dans cette partie, on pose $AB = x$ (cm).

1. Dans quel intervalle fermé le réel x peut-il varier ?
2. Exprimer l'aire $S(x)$ du rectangle ABCD en fonction de x .

Partie B

La fonction f est définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = -x^2 + 5x.$$

1. En faisant appel à sa fonction dérivée f' , dresser le tableau de variations de f .
2. En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle ABCD est maximale.
3.
 - a. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité : 2 cm sur chaque axe), tracer la courbe \mathcal{C} représentative de f sur l'intervalle $[0; 5]$.
 - b. Sur la même figure qu'au 3. a. tracer la tangente à la courbe \mathcal{C} en son point d'abscisse 1.

EXERCICE 3

6 points

On considère le nombre entier $A = 18^{2002}$.

1. A est-il divisible par 9 ? Par 4 ? (Justifier les réponses)
2. On cherche à obtenir le reste de la division euclidienne de A par 7, en utilisant des congruences.

- a. Trouver l'entier r vérifiant $0 \leq r < 7$ et $18 \equiv r \pmod{7}$.
 - b. Quel est le plus petit entier naturel non nul n tel que $r^n \equiv 1 \pmod{7}$?
 - c. Prouver que pour tout nombre entier naturel k , 4^{3k} est congru à 1 modulo 7.
 - d. En déduire le reste de la division euclidienne de A par 7.
3. Montrer que 2002^{18} est divisible par 13.

EXERCICE 4

6 points

Partie A : étude d'une suite

La suite (u_n) est définie sur \mathbb{N} par la donnée de son premier terme $u_0 = 800$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 0,6u_n + 400$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. On définit une autre suite (v_n) sur \mathbb{N} en posant pour tout entier naturel n , $v_n = 1000 - u_n$.
 - a. Calculer les trois premiers termes de cette suite (v_n) .
 - b. Montrer que cette suite (v_n) est géométrique et en déduire l'expression de v_n en fonction de n .
3.
 - a. Déduire des résultats précédents que $u_n = 1000 - 200 \times (0,6)^n$.
 - b. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Partie B : application

Le président d'une association culturelle constate que chaque année l'association garde 60 % de ses anciens adhérents et que 400 personnes nouvelles adhèrent. On suppose que ces données chiffrées restent les mêmes au fil des ans. À la création de cette association, en janvier 2001, il y avait 800 adhérents.

1. Calculer le nombre des adhérents en janvier 2002.
2. Quel sera le nombre d'adhérents en janvier 2003 ?
3. En quelle année verra-t-on pour la première fois l'effectif de l'association dépasser 990 ?