

Exercice 1

6 points

Commun à tous les candidats

Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes, et 2 vertes. Dans les questions 1. et 2. on tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne. Les réponses seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. Soit les évènements suivants :
 - A « Les trois boules sont rouges. »
 - B « Les trois boules sont de la même couleur. »
 - C « Les trois boules sont chacune d'une couleur différente. »
 - a. Calculer les probabilités $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$.
 - b. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues.
Déterminer la loi de probabilité de X . Calculer $E(X)$.
2. Dans cette question, on remplace les 5 boules rouges par n boules rouges où n est un entier supérieur ou égal à 2. L'urne contient donc $n + 5$ boules, c'est-à-dire, n rouges, 3 jaunes et 2 vertes. On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne. Soit les évènements suivants :
 - D « Tirer deux boules rouges. »
 - E « Tirer deux boules de la même couleur. »
 - a. Montrer que la probabilité de l'évènement D est

$$p(D) = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}.$$

- b. Calculer la probabilité de l'évènement E , $p(E)$ en fonction de n . Pour quelles valeurs de n a-t-on $p(E) \geq \frac{1}{2}$?

Exercice 2 (obligatoire)

5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère les points A et B d'affixes respectives i et $-i$.

Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z distincte de $-i$ associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{1+iz}{z+i}.$$

1. Quelle est l'image par l'application f du point O ?
2. Quel est le point qui a pour image par l'application f le point C d'affixe $1+i$?
3. Montrer que l'équation $\frac{1+iz}{z+i} = z$ admet deux solutions que l'on déterminera.

4. Vérifier que $z' = \frac{i(z - i)}{z + i}$, en déduire $OM' = \frac{AM}{BM}$ et :

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

5. Montrer que tous les points de l'axe des abscisses ont leurs images par l'application f situées sur un même cercle (\mathcal{C}) que l'on précisera.
6. Soit M un point du cercle de diamètre $[AB]$ différent de A et de B , montrer que son image M' est située sur l'axe des abscisses.

Exercice 2 (spécialité)

5 points

1. Le plan (\mathcal{P}) est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . Soit A et B dans ce plan d'affixes respectives $a = 1 + i$; $b = -4 - i$. Soit f la transformation du plan (\mathcal{P}) qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$.

a. Exprimer z' en fonction de z .

b. Montrer que f admet un seul point invariant Ω dont on donnera l'affixe. En déduire que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

2. On se place dans le cas où les coordonnées x et y de M sont des entiers naturels avec $1 \leq x \leq 8$ et $1 \leq y \leq 8$.

Les coordonnées $(x'; y')$ de M' sont alors : $x' = 3x + 2$ et $y' = 3y - 1$.

a. On appelle G et H les ensembles des valeurs prises respectivement par x' et y' . Écrire la liste des éléments de G et H .

b. Montrer que $x' - y'$ est un multiple de 3.

c. Montrer que la somme et la différence de deux entiers quelconques ont même parité. On se propose de déterminer tous les couples $(x'; y')$ de $G \times H$ tels que $m = x'^2 - y'^2$ soit un multiple non nul de 60.

d. Montrer que dans ces conditions, le nombre $x' - y'$ est un multiple de 6. Le nombre $x' - y'$ peut-il être un multiple de 30?

e. En déduire que, si $x'^2 - y'^2$ est un multiple non nul de 60, $x' + y'$ est multiple de 10 et utiliser cette condition pour trouver tous les couples $(x'; y')$ qui conviennent.

En déduire les couples $(x; y)$ correspondant aux couples $(x'; y')$ trouvés.

Problème

11 points

★ Partie A - Préliminaires

1. Étudier le sens de variation de la fonction g définie sur \mathbb{R} par

$$g(t) = e^t - t - 1.$$

Quel est le minimum de la fonction g sur l'intervalle $] -\infty ; +\infty[$?

2. En déduire les inégalités suivantes :

a. Pour tout réel t , $e^t \geq t + 1$, $e^t > t$ et $-te^{-t} > -1$.

b. Pour tout réel t tel que $t > -1$, $\ln(1+t) \leq t$.

3. En déduire que pour tout réel x , $\ln(1 - xe^{-x}) < -xe^{-x}$.

★ **Partie B - Étude d'une fonction**

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x^2 - 2\ln(e^x - x).$$

1. Montrer que $f(x) = x^2 - 2x - 2\ln(1 - xe^{-x})$. Quelle est la limite de f en $+\infty$?
On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est $+\infty$.

2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{2(x-1)(e^x - x - 1)}{e^x - x}$.

Dresser le tableau de variation de la fonction f .

Dans un repère orthonormal (unité : 3 cm), on considère la parabole (\mathcal{P}) d'équation $y = x^2 - 2x$ et (\mathcal{C}) la courbe représentative de f . Montrer que (\mathcal{P}) et (\mathcal{C}) sont asymptotes en $+\infty$. Étudier les positions relatives des courbes (\mathcal{P}) et (\mathcal{C}) .

3. Donner une équation de chacune des tangentes (\mathcal{D}) et (\mathcal{D}') respectivement aux courbes (\mathcal{P}) et (\mathcal{C}) aux points d'abscisse 0.
4. Tracer dans un même repère les courbes (\mathcal{P}) et (\mathcal{C}) et leurs tangentes (\mathcal{D}) et (\mathcal{D}') .

★ **Partie C - Étude d'une intégrale**

1. Soit n un entier naturel, on pose $u_n = \int_0^n xe^{-x} dx$.

a. Démontrer que la suite u de terme général u_n est croissante.

b. Calculer u_n à l'aide d'une intégration par parties.

c. Déterminer la limite de la suite u_n .

2. L'aire du domaine (en unités d'aire) limité par les droites d'équation $x = 0$, $x = n$, la parabole (\mathcal{P}) et la courbe (\mathcal{C}) est définie par

$$I_n = -2 \int_0^n \ln(1 - xe^{-x}) dx$$

a. Montrer en utilisant la question 3) des préliminaires que $I_n \geq 2u_n$.

b. On admet que la suite (I_n) a pour limite l . Montrer que : $l \geq 2$.