Baccalauréat ES France juin 2001

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Une université propose aux étudiants trois orientations et trois seulement : une filière A, une filière B et une filière C. Chaque étudiant de l'université est inscrit dans une des trois filières et une seule.

Les effectifs de la filière A sont le double de ceux de la filière B.

Les effectifs de la filière B sont le triple de ceux de la filière C.

On sait de plus que :

20 % des étudiants de la filière A sont des filles ;

30 % des étudiants de la filière B sont des filles ;

40 % des étudiants de la filière C sont des filles.

On choisit au hasard un étudiant de cette université.

On note A l'évènement « L'étudiant est inscrit dans la filière A ». De même pour B et C.

On note F l'évènement « L'étudiant est une fille » ;

G l'évènement : « L'étudiant est un garçon ».

1. Calculer les probabilités des évènements A, B, C ; on vérifiera que $p(\text{B}) = 0,3$.
2. Calculer la probabilité que l'étudiant soit inscrit dans la filière A et soit une fille.

   Montrer que $p(\text{F}) = 0,25$.
3. Calculer la probabilité que l'étudiant soit inscrit dans la filière A sachant que c'est une fille.
4. L'étudiant, choisi au hasard, n'est pas inscrit dansla filière A. Calculer alors la probabilité que ce soit une fille.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le prix de vente des terrains à bâtir dans la même commune rurale est donné par le tableau suivant :

Année	1980	1985	1987	1990	1995	1997	2000
Rang de l'année x_i	0	5	7	10	15	17	20
Prix du m^2 en francs y_i	58,8	60,9	62,1	67,5	71,7	73	73,8

1. Quelle est, en pourcentage, l'augmentation du prix du m^2 entre 1980 et 2000 ?
2. Représenter le nuage de points $M_i(x_i~;~y_i)$ dans un repère orthogonal où 5 cm représentent 10 ans en abscisse, 5 cm représentent 10 francs en ordonnée.
3. Déterminer le point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.
4. Donner le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i~;~y_i)$ à 0,01 près.

   On considère que ce coefficient justifie un ajustement affine par la méthode des moindres carrés. Écrire une équation de la droite d'ajustement affine de y en x, notée (D) (les coefficients sont arrondis à 0,01).

   Tracer (D).
5. Estimer à 1 millier de francs près le prix d'un terrain de 1 500 m^2 en 2003.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un club de sport propose deux types d'abonnement non permutables.
Formule A : une cotisation annuelle de 500 F à laquelle s'ajoute la première année seulement un droit d'entrée de 10 000 F.
Formule B : une cotisation annuelle initiale de 1 000 F qui augmente de 10 % par an. Dès la seconde année, pour fidéliser la clientèle, on effectue une réduction de 50 F sur la cotisation annuelle. Si C, est le montant, exprimé en francs, de la cotisation annuelle la n-ième année, on a $C_1 = 1\,000$, et pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a $C_{n+1} = 1,1C_n - 50$.

1. Déterminer la somme T_n versée au club de sport par membre pendant n années avec la formule A.
2. Soit (D_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par $D_n = C_n + \alpha$ où α est un réel.

   Déterminer le réel α pour que la suite (D_n) soit une suite géométrique de raison 1,1 et préciser le terme initial de la suite.
3. On suppose dans cette question que $\alpha = -500$.
   - **a.** Exprimer D_n puis C_n en fonction de n.
   - **b.** Soit S_n la somme versée au club par un membre pendant n années avec la formule B.

     Montrer que $S_n = 5\,000\,[(1,1)^n - 1] + 500n$.
   - **c.** Quel nombre minimum d'années un membre doit-il cotiser pour que la formule A soit plus avantageuse que la formule B ?

PROBLÈME **11 points**

On donne les fonctions f et g, définies sur $[1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 1,1x + \ln x - \ln(x+1), \quad g(x) = 1,1x + \frac{1}{x}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

Partie A

1. Étudier les variations de f sur $[1 ; +\infty[$.

   Trouver la limite en $+\infty$ de $\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

   En déduire la limite de f en $+\infty$.
2. Montrer que la droite (D) d'équation $y = 1,1x$ est une asymptote de la courbe $(\mathscr{C})$. Étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (D).
3. Tracer $(\mathscr{C})$ et (D).

Partie B

1. Étudier les variations de g sur $[1 ; +\infty[$ et la limite de g en $+\infty$.
2. Vérifier que la droite (D) est une asymptote de la courbe $(\mathscr{C}')$.

   Quelle est la position de $(\mathscr{C}')$ par rapport à (D) ?
3. Tracer $(\mathscr{C}')$ dans le même repère que $(\mathscr{C})$ et (D).
4. On pose $H(x) = (x+1)\ln(x+1) - x\ln x$, pour tout x de $[1 ; +\infty[$.

   Calculer $H'(x)$; en déduire une primitive sur $[1 ; +\infty[$ de la fonction $i : x \mapsto g(x) - f(x)$.

5. Calculer l'intégrale $\int_1^5 \left[g(x) - f(x)\right] \mathrm{d}x$.

En donner une interprétation graphique.

Partie C

Les fonctions f et g données plus haut modélisent respectivement la quantité d'objets produits par une entreprise et la quantité d'objets commandés à cette entreprise.

Plus précisément, si t est la date exprimée en semaines, $f(t)$ est la quantité d'objets produits à la date t en milliers et $g(t)$ la quantité d'objets commandés à cette même date en milliers.

1. Lorsque l'on a $f(t) > g(t)$, on dit que « la demande est satisfaite à la date t ».

Démontrer que la demande n'est jamais satisfaite.

2. On admet que le nombre total d'objets, en milliers, dont la demande n'est pas satisfaite entre les dates n et n' avec $n' > n$ est donné par $\int_n^{n'} \left[g(t) - f(t)\right] \mathrm{d}t$.

Donner, à un objet près, le nombre total d'objets dont la demande n'est pas satisfaite entre les dates 1 et 5.

3. On considère que « le niveau de fabrication est suffisant » lorsque moins de 20 demandes d'objets ne sont pas satisfaites, c'est-à-dire lorsque l'on a : $g(t) - f(t) < 0,02$.

En admettant que $g - f$ est une fonction strictement décroissante sur $[1~;~+\infty[$, à partir de quelle date le niveau de fabrication est-il suffisant ?