Sujet National

Exercices : Probabilités –Statistiques – Problème : Fonction exponentielle.

BACCALAUREAT GENERAL Session 2002

***Epreuve:* MATHEMATIQUES**

Série : ES Durée : 3 heures Coef. : 5 ou 7

OBLIGATOIRE et **SPECIALITE**

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Le candidat doit traiter les DEUX exercices et le problème. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le formulaire officiel de mathématiques, prévu par l'arrêté du 27 mars 1991, et deux feuilles de papier millimétré sont joints au sujet.

Dès que le sujet vous est remis assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

EXERCICE 1 commun à tous les candidats

Une école de commerce a effectué une enquête, en janvier 2000, auprès de ses jeunes diplômés des trois dernières promotions afin de connaître leur insertion professionnelle.
A la première question, trois réponses seulement sont proposées :
A "La personne a une activité professionnelle"
B "La personne poursuit ses études"
C "La personne recherche un emploi ou effectue son service national".
On a constaté que 60% des réponses ont été envoyées par des filles.
Dans l'ensemble des réponses reçues, on a relevé les résultats suivants :
65% des filles et 55% des garçons ont une activité professionnelle ;
20% des filles et 15% des garçons poursuivent leurs études.
On prend au hasard la réponse d'un jeune diplômé.
a) Montrer que la probabilité qu'il poursuive ses études est égale à 0,18.
b) Calculer la probabilité qu'il exerce une activité professionnelle.
On prend au hasard la réponse d'une personne qui poursuit ses études ; quelle est la probabilité que ce soit la réponse d'une fille (on donnera le résultat sous forme fractionnaire) ?
On choisit maintenant au hasard et de façon indépendante trois réponses (on suppose que ce choix peut être assimilé à un tirage successif avec remise).
A l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la probabilité que l'une au moins des réponses soit celle d'un jeune diplômé poursuivant ses études.
Dans l'ensemble des réponses des jeunes diplômé exerçant une activité professionnelle, la répartition des salaires bruts annuels en milliers d'euros est la suivante :

Salaire brut annuel S	$20\leq S<22$	$22\leq S<26$	$26\leq S<30$	$30\leq S<34$	$34\leq S<38$	$38\leq S<40$
Pourcentage	5	15	28	22	20	10

Quel est le salaire brut annuel moyen ?

EXERCICE 2 pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Julie possède depuis plusieurs mois un téléphone mobile pour lequel elle a souscrit un forfait mensuel de deux heures. Soucieuse de bien gérer ses dépenses, elle étudie l'évolution de ses consommations.

Elle a constaté que :

Si pendant le mois noté n elle a dépassé son forfait, la probabilité qu'elle le dépasse le mois suivant noté $(n + 1)$ est $\frac{1}{5}$.

Si pendant le mois noté n elle n'a pas dépassé son forfait, la probabilité qu'elle le dépasse le mois suivant est $\frac{2}{5}$.

Pour n entier naturel strictement positif, on désigne par A_n l'événement "Julie a dépassé son forfait le mois n " et par B_n l'événement contraire.

On pose $p_n = p(A_n)$ et $q_n = p(B_n)$; on a $p_1 = \frac{1}{2}$.

Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1.a. Donner les probabilités de A_{n+1} sachant que A_n est réalisé et de A_{n+1} sachant que B_n est réalisé.

b. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, les égalités suivantes sont vraies : $p(A_{n+1} \cap A_n) = \frac{1}{5}\, p_n$ et $p(A_{n+1} \cap B_n) = \frac{2}{5}\, q_n$.

En déduire que l'égalité suivante est vraie : $p_{n+1} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\, p_n$.

2. Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose : $u_n = p_n - \frac{1}{3}$.

Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_1.

3. Ecrire u_n puis p_n en fonction de n. Déterminer la limite de (p_n).

EXERCICE 2 candidats n'ayant que l'enseignement obligatoire

Les résultats numériques seront obtenus à l'aide de la calculatrice ; aucun détail des calculs statistiques n'est demandé.

Le tableau suivant donne la dépense, en millions d'euros, des ménages en produits informatiques (matériels, logiciels, réparations) de 1990 à 1998.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Rang de l'année x_i,	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Dépense y_i	398	451	423	501	673	956	1077	1255	1427

Source INSEE

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique (x_i, y_i) et le point moyen dans un repère orthogonal tel que 2 cm représentent une année en abscisse et 1 cm représente 100 millions d'euros en ordonnée (ainsi 398 sera représenté par 3,98 cm).

2.a. Donner la valeur arrondie à 10^{-3} du coefficient de corrélation linéaire de la série (x_i, y_i). Un ajustement affine paraît-il justifié ?

b. Ecrire une équation de la droite d'ajustement affine D de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à 10^{-3}). Représenter D dans le repère précédent.

c. En utilisant cet ajustement affine, donner une estimation de la dépense des ménages (arrondie à un million d'euros) en produits informatiques en 2000.

3. L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel. On pose $z_i = \ln y_i$

a. Recopier et compléter le tableau suivant où z_i est arrondi à 10^{-3} :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
z_i	5,986	6,111	6,047	6,217					

b. Donner la valeur arrondie à 10^{-3} du coefficient de corrélation linéaire de la série(x_i, z_i). Ecrire une équation de la droite d'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à 10^{-3})

c. En utilisant cet ajustement, donner une estimation de la dépense des ménages (arrondie à un million d'euros) en produits informatiques en 2000.

4. En 2000 les ménages ont dépensé 68,9 milliards d'euros pour la culture, les loisirs et les sports et 3,1% de ces dépenses concernent les produits informatiques.
Avec lequel des deux ajustements l'estimation faite est-elle la meilleure ?

PROBLEME commun à tous les candidats

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = (x^2 - 3x + 3)\, e^x - 4$

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
b. Etudier les variations de f sur $[0, +\infty[$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 appartenant à $]1, 2[$
Donner une valeur arrondie à 10^{-3} de x_0.

3. Déduire des résultats précédents le signe de f(x) sur $[0, +\infty[$.

PARTIE B

Une entreprise fabrique un produit, en quantité x exprimé en tonnes, sa capacité de production ne pouvant dépasser 3 tonnes. Le coût total de fabrication de ce produit, en centaines de milliers d'euros, est donné par : $C_T(x) = (x - 3)e^x + 3x + 4$

Le coût moyen est défini sur $]0 ; 3]$ par la formule suivante : $C_m(x) = \dfrac{C_T(x)}{x}$.

1. Pour tout x de $]0 ; 3]$ calculer $C'_m(x)$ et vérifier que l'égalité suivante est vraie :
$C'_m(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$.
En déduire le sens de variation de C_m sur $]0 ; 3]$.

2. Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût minimum ?
Quel est le coût moyen minimum (arrondi au millier d'euros) d'une tonne de ce produit ?

PARTIE C

Une tonne du produit fabriqué est vendue 300 000 euros; toute la production est vendue.

1. a. Le bénéfice algébrique, en centaines de milliers d'euros, réalisé après la fabrication et la vente de x tonnes du produit est noté B(x). Montrer l'égalité suivante :
$$B(x) = (3 - x)e^x - 4.$$
b. Etudier le sens de variation de B sur $[0 ; 3]$. Quelle est la production pour laquelle le bénéfice est maximum ?

2. a. Tracer la courbe représentative de B dans un plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques: 5 cm pour une tonne en abscisse et 2 cm pour 100 000 euros en ordonnée).
b. A l'aide du graphique, déterminer à 0,1 près les quantités à produire pour que l'entreprise réalise un gain.