*Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.*
*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Une feuille de papier millimétré, qui sera utilisée dans le problème, est remise au candidat avec le sujet.*

*L'usage des calculatrices est autorisé (circulaire n°99-186 du 16-11-1999).*
*Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.*

## Exercice 1 (4 points)

Une boîte contient $4n$ trombones de deux couleurs différentes : $2n + 1$ sont jaunes et $2n - 1$ sont verts ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$).

On prélève simultanément deux trombones au hasard.

1- Dans cette question on suppose que $n = 10$. Calculer la probabilité des événements suivants *(on donnera la valeur exacte et la valeur arrondie au millième)*.
   a) A : les deux trombones sont de couleurs différentes.
   b) B : les deux trombones sont verts.
   c) C : les deux trombones sont de même couleur.

2- Dans cette question, $n$ désigne un entier quelconque supérieur ou égal à 1.
   On note $p_n$ la probabilité de l'événement « les deux trombones sont de couleurs différentes ».
   a) Montrer que $p_n = \dfrac{4n^2 - 1}{8n^2 - 2n}$.
   b) On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{8x^2 - 2x}$ ($x$ réel, $x \neq 0$, $x \neq 1/4$), dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ | | $1/4$ | | $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $1/2$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $4+2\sqrt{3}$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $4-2\sqrt{3}$ | ↘ | $1/2$ |

En utilisant ce tableau, déterminer l'entier naturel $n$ pour lequel la probabilité $p_n$ est maximale.

## Exercice 2 (5 points)

Une municipalité envisage l'aménagement d'un plan d'eau artificiel. Dans le projet, ce plan d'eau devra contenir 30 000 m$^3$ le 1$^{er}$ juillet.

On estime, qu'en période estivale les pertes hydriques dues à l'évaporation sont de 2% par jour. Pour les compenser, on prévoit durant les mois d'été un apport, pendant chaque nuit, de 500 m$^3$.

Le problème est de savoir si les apports prévus pendant les mois de juillet et août seront suffisants pour que le volume ne descende pas en dessous de la valeur critique de 27 000 m$^3$.

On note $V_n$ le volume d'eau en m$^3$ contenu dans le plan d'eau, selon ce projet, au matin du $n^{\text{ème}}$ jour qui suit le 1$^{er}$ juillet. $V_0$ désigne le volume au matin du 1$^{er}$ juillet, on a donc $V_0 = 30\,000$ ; $V_1$ désigne le volume au matin du 2 juillet, etc.

1- Calculer $V_1$, $V_2$ et $V_3$.

2- Expliquer pourquoi $V_{n+1} = V_n \times 0{,}98 + 500$.

3- On considère la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence précédente et ayant pour premier terme $V_0 = 30\,000$.

a) Cette suite est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier la réponse.

b) Pour tout entier $n$, on pose $U_n = V_n - 25\,000$. Démontrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

c) Exprimer $U_n$ en fonction de $n$ et en déduire que $V_n = 5\,000\times 0{,}98^n + 25\,000$.

d) Déterminer la limite de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4- Quelles sont les valeurs de $n$ pour lesquelles $V_n < 27\,000$ ? En déduire la réponse au problème posé en introduction.

## Problème (11 points)

*On prendra soin de faire figurer sur la copie les calculs intermédiaires conduisant aux résultats présentés.*

On considère la fonction $f$ définie sur $]1\,;+\infty[$ par $f(x) = -x + 4 + \ln\dfrac{x+1}{x-1}$.

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, on désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$.

1- Étudier les limites de $f$ en 1 et en $+\infty$.

2- Montrer que pour tout réel $x$ de $]1\,;+\infty[$ on a : $f'(x) = -\dfrac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}$, et en déduire le sens de variation de $f$ sur cet intervalle.

3- a) Montrer que la droite D d'équation $y = -x + 4$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

b) Montrer que, pour tout $x$ de $]1\,;+\infty[$, $\dfrac{x+1}{x-1} > 1$ et en déduire la position de $\mathscr{C}$ par rapport à D.

4- Déterminer les coordonnées du point de $\mathscr{C}$ où la tangente à la courbe a un coefficient directeur égal à $-5/3$ et donner une équation de cette tangente $\Delta$.

5- Montrer que, sur l'intervalle $[4\,;5]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$. Donner une valeur approchée de $\alpha$ au centième près.

6- Construire la courbe $\mathscr{C}$ et les droites D et $\Delta$ sur une feuille de papier millimétré (*on prendra comme unité graphique 2cm sur chaque axe)*.

7- a) Soit $h$ la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par $h(x) = \ln\dfrac{x+1}{x-1}$.

Monter que la fonction $H$ définie sur $]1\,;+\infty[$ par $H(x) = (x+1)\ln(x+1) - (x-1)\ln(x-1)$ est une primitive de $h$ sur cet intervalle.

b) En déduire l'aire en $\text{cm}^2$ du domaine du plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$ (*on donnera la valeur exacte, puis la valeur décimale arrondie au centième*).

| BACCALAURÉAT GÉNÉRAL – SÉRIE L | SESSION 2000 | |
|---|---|---|
| *MATHÉMATIQUES (enseignement de spécialité)* | Durée : 3 heures | Coefficient : 4 |
| Ce sujet comporte 2 pages. | *Repère : 0MALIME1* | |

# BACCALAURÉAT, SÉRIE L
# ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ
# FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

## I. STATISTIQUE

*Moyenne, variance, écart type*

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \quad ; \quad V(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\bar{x})^2$$

$$\sigma_x=\sqrt{V(x)}$$

Dans le cas d'un regroupement en classes :

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}n_ix_i \ ; \ V(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}n_i(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}n_ix_i^2-(\bar{x})^2$$

## II. COMBINATOIRE - DÉNOMBREMENTS

$Card(A\cup B)=Card\ A+Card\ B-Card\ (A\cap B)$
$Card(A\times B)=Card\ A\ \ Card\ B$

*Soit E un ensemble de n éléments*

Nombre de permutations de $E$ :

$n!=1\times2\times3\times\cdots\times n$ ; $0!=1$

Nombre d'arrangements de $p$ éléments de $E$ :

$$A_n^p=n(n-1)\cdots(n-p+1)$$

Nombre de sous-ensembles de $p$ éléments de $E$ :

$$C_n^p=\binom{n}{p}=\frac{A_n^p}{p!}=\frac{n(n-1)\ \cdots\ (n-p+1)}{p!}=\frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$C_n^p=C_n^{n-p}\ ; \quad C_{n+1}^{p+1}=C_n^p+C_n^{p+1}$$

## III. PROBABILITÉS

Si $A$ et $B$ sont incompatibles : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
Dans le cas général : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
$P(\overline{A})=1-P(A) \quad ; \quad P(\Omega)=1 \quad ; \quad P(\varnothing)=0$

Si $A_1,\cdots,A_n$ forment une partition de $A$, $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$

Dans le cas équiprobable : $P(A)=\dfrac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$

*Probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé*

$P(A\cap B)=P(A|B)P(B)$ ; $P(A|B)$ se note aussi $P_B(A)$

Cas où $A$ et $B$ sont indépendants : $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

*Formule des probabilités totales*

Si les événements $B_1,B_2,\cdots,B_n$ forment une partition de $\Omega$, alors $P(A)=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)+\cdots+P(A\cap B_n)$

*Variable aléatoire*

Fonction de répartition : $F(x)=P(X\leqslant x)$

Espérance mathématique : $E(X)=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i$

Variance : $V(X)=\sum_{i=1}^{n}p_i(x_i-E(X))^2=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i^2-(E(X))^2$

Écart type $\sigma_x=\sqrt{V(X)}$

## IV. ALGÈBRE

A. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \quad ; \quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+b^n$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

B. *ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ*

Soient $a$, $b$, $c$ des nombres réels, $a\neq0$, et $\Delta=b^2-4ac$.

L'équation $ax^2+bx+c=0$ admet :

- si $\Delta>0$, deux solutions réelles
$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$
- si $\Delta=0$, une solution réelle double
$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$$
- si $\Delta<0$, aucune solution réelle.

Si $\Delta\geqslant0$, $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

## C. *SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES*

*Suites arithmétiques*

Premier terme $u_0$ ; $u_{n+1} = u_n + a$ ; $u_n = u_0 + na$

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

*Suites géométriques*

Premier terme $u_0$ ; $u_{n+1} = bu_n$ ; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $S_n = 1+b+b^2+\cdots+b^n = \dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}$

Si $b = 1$, $S_n = n+1$

# V. ANALYSE

## A. *PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

### 1. Fonctions logarithme et exponentielle

$ln\, x = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$ $(x > 0)$

$ln\, 1 = 0$

$ln\, e = 1$

$ln\, ab = ln\, a + ln\, b$

$ln \dfrac{a}{b} = ln\, a - ln\, b$

Si $x \in ]-\infty, +\infty[$ et $y \in ]0, +\infty[$,

$y = exp\, x = e^x$ équivaut à $x = ln\, y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x\, ln\, a}$ $(a > 0)$

$log\, x = \dfrac{ln\, x}{ln\, 10}$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$ln\, a^x = x\, ln\, a$

### 2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha\, ln\, x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

## B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS ET DE SUITES*

### 1. Fonctions

*Comportement à l'infini*

$\lim\limits_{x \to +\infty} ln\, x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$ ; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

*Comportement à l'origine*

$\lim\limits_{x \to 0} ln\, x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$ ; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

*Croissances comparées à l'infini*

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln\, x}{x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln\, x}{x^\alpha} = 0$

### 2. Suites

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha = +\infty$ ; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha = 0$

Si $a > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty$ ; si $0 < a < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0$

Si $\alpha > 0$ et $a > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$

C. DÉRIVÉES ET PRIMITIVES (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

**1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles**

| $f(x)$ | $f'(x)$ | *Intervalle de validité* |
|---|---|---|
| $k$ | $0$ | $]-\infty,+\infty[$ |
| $x$ | $1$ | $]-\infty,+\infty[$ |
| $x^n,\ n\in\mathbb{N}^*$ | $nx^{n-1}$ | $]-\infty,+\infty[$ |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ | $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$ |
| $\frac{1}{x^n},\ n\in\mathbb{N}^*$ | $-\frac{n}{x^{n+1}}$ | $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0,+\infty[$ |
| $x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ | $]0,+\infty[$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ | $]0,+\infty[$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $]-\infty,+\infty[$ |

**2. Opérations sur les dérivées**

$(u+v)' = u'+v'$

$(ku)' = ku'$.

$(uv)' = u'v+uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(v\circ u)' = (v'\circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, $u$ à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL*

*Formules fondamentales*

Si $F$ est une primitive de $f$, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$

Si $g(x)=\int_a^x f(t)dt$, alors $g'(x)=f(x)$

$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)dt$

*Formule de Chasles*

$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

*Linéarité*

$\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$

*Positivité*

Si $a\leqslant b$ et $f\geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

*Intégration d'une inégalité*

Si $a\leqslant b$ et $f\leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

Si $a\leqslant b$ et $m\leqslant f\leqslant M$,
alors $m(b-a)\leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$

*Valeur moyenne de $f$ sur* $[a, b]$ : $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

*Intégration par parties*

$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$