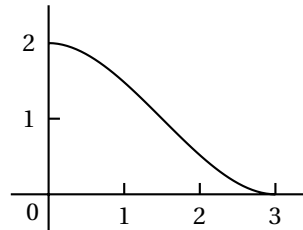


Durée de l'épreuve : 3 heures

EXERCICE 1 OBLIGATOIRE

**8 points**

Une entreprise souhaite fabriquer, pour de jeunes enfants, des toboggans dont le profil a l'allure de la courbe ci-contre.



Le plan est muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On prendra 3 cm pour unité graphique.

L'objet de l'exercice est de modéliser ce profil à l'aide de la courbe représentative  $\mathcal{C}$  d'une fonction définie sur l'intervalle  $[0; 3]$  vérifiant les conditions suivantes :

(1) La courbe  $\mathcal{C}$  passe par les points  $A(0; 2)$  et  $B(3; 0)$  ;

(2) La courbe  $\mathcal{C}$  admet en chacun des points A et B une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

**Partie I**

1. a. Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 2.$$

Étudier les variations de la fonction  $f$  (on ne demande pas l'étude des limites).

b. Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3.$$

Étudier les variations de la fonction  $g$  (on ne demande pas l'étude des limites).

2. On note respectivement  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$ .

a. Démontrer que  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  passent par le point  $K\left(1; \frac{4}{3}\right)$  et ont la même tangente T en ce point.

b. Tracer sur un même graphique, la droite T, la partie de  $\mathcal{C}_f$  correspondant aux points d'abscisses comprises entre 0 et 1, et la partie de  $\mathcal{C}_g$  correspondant aux points d'abscisses comprises entre 1 et 3.

*La courbe obtenue en réunissant les deux parties de courbes est une réponse au problème posé.*

**Partie II**

Le bureau d'études a établi que l'on pouvait également modéliser le profil du toboggan à l'aide d'une partie de la courbe représentative  $\mathcal{C}_h$  de la fonction  $h$ , définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$h(x) = \frac{4}{27}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 2.$$

1. Démontrer que la fonction  $h$  vérifie les conditions (1) et (2).
2. Déterminer les coordonnées du point de  $\mathcal{C}_h$  d'abscisse 1 et le coefficient directeur de la tangente en ce point.

**EXERCICE 2 OBLIGATOIRE****7 points**

Alice et Carole comparent leurs salaires. Elles débutent chacune avec un salaire de 1 500 euros.

Chaque mois, à partir du deuxième mois :

- Le salaire d'Alice augmente de 8 euros.
- Le salaire de Carole augmente de 0,2 % et on y ajoute 4 euros.

Pour tout entier naturel  $n$ , on désigne par  $a_n$ , le salaire mensuel en euros que perçoit Alice à la fin du  $(n + 1)$ -ième mois, et par  $c_n$ , celui perçu par Carole. Ainsi :

$a_0 = c_0 = 1\,500$  ;  $a_1$ , et  $c_1$  représentent les salaires perçus à la fin du deuxième mois.

1. Calculer  $a_1$  et  $c_1$ ,  $a_2$  et  $c_2$ .
2.
  - a. Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_n$ . Quelle est la nature de la suite  $(a_n)$  ?
  - b. En déduire, pour tout entier naturel  $n$ , l'expression de  $a_n$ , en fonction de  $n$ .
3.
  - a. Justifier que, pour tout entier naturel  $n$  :

$$c_{n+1} = 1,002c_n + 4.$$

- b. On considère la suite  $(v_n)$  telle que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = c_n + 2\,000$ .

Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 1,002. Calculer  $v_0$  et, pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ . En déduire que :

$$c_n = 3\,500 \times 1,002^n - 2\,000.$$

4. Calculer, puis comparer les salaires annuels qu'Alice et Carole ont perçus au cours de leur première année de travail.

**Rappel**

Si  $q$  est un réel différent de 1 et  $n$  un entier naturel supérieur à 2,

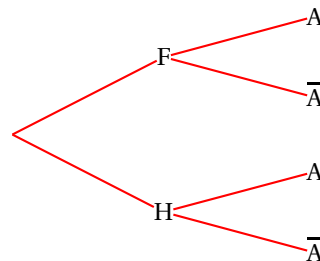
$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

$$\text{et } 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Le candidat traitera au choix l'exercice 3 ou l'exercice 4****EXERCICE 3 AU CHOIX****5 points**

Une agence de voyages de Paris organise des circuits touristiques comprenant les sites suivants : le musée d'Orsay, le musée du Louvre, le musée Grévin, l'Arc de Triomphe, la tour Eiffel, l'Assemblée nationale.

1. L'agence propose à ses clients un forfait pour la visite de quatre sites parmi les six cités.
  - a. Quel est le nombre de choix possibles si on ne tient pas compte de l'ordre des visites ?
  - b. Combien de ces choix comprennent à la fois la visite de la tour Eiffel et celle du musée d'Orsay ?
2. Une étude statistique a permis d'observer que 55 % des clients de l'agence sont des femmes et 45 % des hommes. De plus, parmi ces clients, 30 % des hommes et 20 % des femmes visitent l'Assemblée nationale. On choisit au hasard un client. On note  $F$  l'évènement « le client est une femme »,  $H$  l'évènement « le client est un homme »,  $A$  l'évènement « le client visite l'Assemblée nationale » et  $\bar{A}$  l'évènement contraire de  $A$  : « le client ne visite pas l'Assemblée nationale ».
  - a. D'après les informations de l'énoncé, préciser les probabilités  $p(F)$ ,  $p(H)$ ,  $p_H(A)$ ,  $p_F(A)$ .
  - b. Reproduire et compléter l'arbre de probabilité ci-contre. En déduire la valeur de  $p(A)$ .



- c. Quelle est la probabilité que le client soit un homme sachant qu'il ne visite pas l'Assemblée nationale ?

## EXERCICE 4 AU CHOIX

5 points

Le 1<sup>er</sup> août 2002 sera un jeudi. Le but du problème est de déterminer les années comprises entre 2003 et 2029 pour lesquelles le 1<sup>er</sup> août tombera aussi un jeudi. Pour ces années, une année bissextile est une année dont le millésime est divisible par 4. On rappelle qu'une année non bissextile compte 365 jours et une année bissextile 366 jours.

1. Donner la liste des années bissextiles comprises entre 2003 et 2029.
2.
  - a. Démontrer que l'on a :  $365 \equiv 1 \pmod{7}$  et  $366 \equiv 2 \pmod{7}$ .
  - b. Prouver que le 1<sup>er</sup> août 2003 sera un vendredi et le 1<sup>er</sup> août 2004 un dimanche.
  - c. Préciser le jour de la semaine correspondant au 1<sup>er</sup> août de chacune des années de 2005 à 2013.
3. Donner la liste des années de 2003 à 2029 pour lesquelles le 1<sup>er</sup> août sera un jeudi.