

## Baccalauréat S France juin 2001

### EXERCICE 1

**6 points**

#### Commun à tous les candidats

Soient trois points de l'espace A, B, C non alignés et soit  $k$  un réel de l'intervalle  $[-1; 1]$ .

On note  $G_k$  le barycentre du système  $\{(A, k^2 + 1), (B, k), (C, -k)\}$ .

1. Représenter les points A, B, C, le milieu I de [BC] et construire les points  $G_1$  et  $G_{-1}$ .

2. a. Montrer que, pour tout réel  $k$  de l'intervalle  $[-1; 1]$ , on a l'égalité :

$$\overrightarrow{AG_k} = -\frac{k}{k^2 + 1} \overrightarrow{BC}.$$

- b. Établir le tableau de variation de la fonction  $f$  définie sur  $[-1; 1]$  par

$$f(x) = -\frac{x}{x^2 + 1}.$$

- c. En déduire l'ensemble des points  $G_k$  quand  $k$  décrit l'intervalle  $[-1; 1]$ .  
Pour la suite de l'exercice, aucune figure n'est demandée sur la copie.

3. Déterminer l'ensemble E des points  $M$  de l'espace tels que :

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|.$$

4. Déterminer l'ensemble F des points  $M$  de l'espace tels que :

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|.$$

5. L'espace est maintenant rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Les points A, B, C ont pour coordonnées respectives  $(0; 0; 2)$ ,  $(-1; 2; 1)$  et  $(-1; 2; 5)$ . Le point  $G_k$  et les ensembles (E) et (F) sont définis comme ci-dessus.

- a. Calculer les coordonnées de  $G_1$  et  $G_{-1}$ .  
Montrer que les ensembles (E) et (F) sont sécants.

- b. Calculer le rayon du cercle  $\mathcal{C}$  intersection de (E) et (F).

### EXERCICE 2

**5 points**

#### Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  [unité graphique : 6 cm].

On considère la suite  $(\alpha_n)$  de nombres réels définie par  $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{5\pi}{6}$ . Pour tout entier naturel  $n$ , on appelle  $M_n$  le point du cercle  $\mathcal{C}$  de centre O et de rayon 1 tel que l'angle  $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_n})$  ait pour mesure  $\alpha_n$ .

1. Placer les douze points  $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{11}$ .
2. On appelle  $z_n$  l'affixe de  $M_n$ . Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a l'égalité :  $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{12})}$ .
3.
  - a. Montrer, pour tout entier naturel  $n$ , les propriétés suivantes :
    - les points  $M_n$  et  $M_{n+6}$  sont diamétralement opposés ;
    - les points  $M_n$  et  $M_{n+12}$  sont confondus.
  - b. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a l'égalité  $z_{n+4} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} z_n$ .  
En déduire que la distance  $M_n M_{n+4}$  vaut  $\sqrt{3}$  puis que le triangle  $M_n M_{n+4} M_{n+8}$ , est équilatéral.  
On admettra que tous les triangles équilatéraux ayant pour sommets des points  $M_n$  sont de la forme  $M_n M_{n+4} M_{n+8}$ .
4. Douze cartons indiscernables au toucher, marqués  $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{11}$  sont disposés dans une urne. On tire au hasard et simultanément trois cartons de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir les trois sommets d'un triangle équilatéral.

## EXERCICE 2

5 points

## Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  [unité graphique : 6 cm].

On considère la transformation  $f$  du plan qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  définie par  $z' = ze^{\frac{5i\pi}{6}}$  et on définit une suite de points  $(M_n)$  de la manière suivante :

$M_0$  a pour affixe  $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $M_{n+1} = f(M_n)$ .

On appelle  $z_n$  l'affixe de  $M_n$ .

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $f$ .  
Placer les points  $M_0, M_1, M_2$ .

2. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a l'égalité

$$z_n = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6})}$$

(on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

3. Soient deux entiers  $n$  et  $p$  tels que  $n$  soit supérieur ou égal à  $p$ . Montrer que deux points  $M_n$  et  $M_p$  sont confondus si, et seulement si,  $(n - p)$  est multiple de 12.
4.
  - a. On considère l'équation (E) :  $12x - 5y = 3$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple  $(4 ; 9)$  est solution, résoudre l'équation (E).
  - b. En déduire l'ensemble des entiers naturels  $n$  tels que  $M_n$  appartienne à la demi-droite  $[Ox)$ .

## PROBLÈME

9 points

## Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Toutes les courbes demandées seront représentées sur un même graphique (unité graphique : 2 cm).

## Partie A

★ Étude d'une fonction  $f$

On définit la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \ln(\sqrt{1+x} - 1).$$

1. Calculer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
2. Étudier le sens de variation de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .
3. Soit  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  et A le point de  $\mathcal{C}$  d'abscisse 3.  
Calculer l'ordonnée de A. Soit B le point de  $\mathcal{C}$  d'abscisse  $\frac{5}{4}$ , P le projeté orthogonal de B sur l'axe  $(O; \vec{u})$  et H le projeté orthogonal de B sur l'axe  $(O; \vec{v})$ . Déterminer les valeurs exactes des coordonnées des points B, P et H. Placer les points A, B, P et H dans le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  et représenter la courbe  $(\mathcal{C})$ .

## Partie B

★ Utilisation d'une rotation

Soit  $r$  la rotation de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . À tout point  $M$  du plan d'affixe  $z$  la rotation  $r$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$ .

1.
  - a. Donner  $z'$  en fonction de  $z$ .  
On note  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$  ( $x, y, x', y'$  réels). Exprimer  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $x$  et  $y$ , puis exprimer  $x$  et  $y$  en fonction de  $x'$  et  $y'$ .
  - b. Déterminer les coordonnées des points  $A', B'$  et  $P'$  images respectives des points A, B et P par la rotation  $r$ .
2. On appelle  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^{-2x} + 2e^{-x}$  et  $(\Gamma)$  sa courbe représentative dans le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .
  - a. Montrer que lorsqu'un point  $M$  appartient à  $(\mathcal{C})$ , son image  $M'$  par  $r$  appartient à  $(\Gamma)$ .  
On admet que lorsque le point  $M$  décrit  $(\mathcal{C})$ , le point  $M'$  décrit  $(\Gamma)$ .
  - b. Tracer sur le graphique précédent les points  $A', B', P'$  et la courbe  $(\Gamma)$  (l'étude des variations de  $g$  n'est pas demandée).

## Partie C

★ Calcul d'intégrales

On rappelle que l'image d'un domaine plan par une rotation est un domaine plan de même aire.

- 
1. Calculer l'intégrale  $\int_0^{\ln 2} g(x) dx$ .  
Interpréter graphiquement cette intégrale.
2. a. Déterminer, en unités d'aire, l'aire  $\mathcal{A}$  du domaine plan  $\mathcal{D}$  limité par les segments  $[AO]$ ,  $[OH]$  et  $[HB]$  et l'arc de courbe  $(\mathcal{C})$  d'extrémités B et A.
- b. On pose  $I = \int_{\frac{5}{4}}^3 \ln(\sqrt{1+x} - 1) dx$ .  
Trouver une relation entre  $\mathcal{A}$  et I puis en déduire la valeur exacte de l'intégrale I.