Baccalauréat ES Pondichéry avril 2004

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Chaque question comporte trois affirmations repérées par les lettres a, b *et* c.
Le candidat doit indiquer pour chacune d'elles si elle et vraie ou fausse sans justification.
À chaque question est affecté un certain nombre de points. Pour chaque question, une réponse exacte rapporte le nombre de points affecté, une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points affecté.
Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces questions ; elles ne rapportent aucun point et n'en enlèvent aucun.
Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.
Les réponses seront transcrites dans le tableau fourni en annexe.

1. Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $f(x) = 2\ln x - 3x + 5$.
   Dans un repère, une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :

   a. $y = -x + 1$
   b. $y = 2x - 3$
   c. $y = -x + 3$

2. On considère une fonction g dont le tableau de variations est donné ci-dessous.
   On pose $h = \ln g$.

x	5	7
Variation de g	-3	1

   a. h n'est pas définie sur $[5~;~7]$
   b. h est strictement décroissante sur $[5~;~7]$
   c. h est strictement croissante sur $[5~;~7]$

3. L'ensemble des solutions de l'inéquation $x\ln(0,3) - 1 \leqslant 0$ est :

   a. $\left]-\infty~;~\dfrac{1}{\ln(0,3)}\right]$
   b. $\left[\dfrac{1}{\ln(0,3)}~;~+\infty\right[$
   c. $\left]0~;~\dfrac{1}{\ln(0,3)}\right[$

4. u est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x+3}$.
   Une primitive U de u sur $\mathbb{R}$ est définie par :

   a. $U(x) = \ln\left(x^2 + 2x + 3\right)$
   b. $U(x) = 2\ln\left(x^2 + 2x + 3\right)$
   c. $U(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2 + 2x + 3\right) + 4.$

EXERCICE 2 — 5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans une académie, les élèves candidats au baccalauréat série ES se répartissent en 2003 selon les trois enseignements de spécialité : mathématiques, sciences économiques et sociales et langue vivante.
Nous savons de plus que :
37 % des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité mathématiques ;
25 % des candidats ont choisi l'enseignement de spécalité langue vivante ;
21 % des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité mathématiques et ont obtenu le baccalauréat ;
32,5 % des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité sciences économiques et sociales et ont obtenu le baccalauréat.
De plus, parmi les candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité langue vivante, 72,5 % ont obtenu le baccalauréat.
On interroge un candidat pris au hasard.
On note :
M l'évènement « le candidat a choisi l'enseignement de spécialité mathématiques » ;
S l'évènement « le candidat a choisi l'enseignement de spécialité sciences économiques et sociales » ;
L l'évènement « le candidat a choisi l'enseignement de spécialité langue vivante » ;
R l'évènement « le candidat a obtenu le baccalauréat ».
On pourra faire un arbre pour faciliter la réponse aux questions. Les résultats demandés seront arrondis au millième près.

1. Traduire en termes de probabilités et en utilisant les notations indiquées les informations numériques données ci-dessus.
2. **a.** Déterminer la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'enseignement de spécialité sciences économiques et sociales.

   b. Déterminer la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'enseignement de spécialité langue vivante et ait réussi aux épreuves du baccalauréat.
3. Quelle est la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'enseignement de spécialité langue vivante et ait échoué au baccalauréat ?
4. Ce candidat a choisi l'enseignement de spécialité mathématiques.
   Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas obtenu le baccalauréat ?
5. Montrer que le pourcentage de réussite au baccalauréat pour les candidats de ES dans cette académie est 71,6 %.
6. On interroge successivement au hasard et de façon indépendante trois candidats.
   Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux soit reçu ?

EXERCICE 3 — 7 points

Commun à tous les candidats

1. On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}} + 3$$

   où a et b sont deux réels que l'on se propose de déterminer.
   On sait que f admet un maximum au point d'abscisse 4 et que le point A(0 ; 2) appartient à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 2 cm en abscisses et 5 cm en ordonnées.

   a. Soit f' la fonction dérivée de f. Déterminer $f'(x)$ pour x appartenant à $[0\,;\,+\infty[$.

b. Montrer que $a = 1$ et $b = -1$.

2. Étude de la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}} + 3.$$

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote Δ à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

b. Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variations.

3. **a.** Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$									

On arrondira les valeurs au centième.

b. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ.

4. *Étude économique*

Les dépenses de téléphone, en milliers d'euros, de la société TOUPACHER sont consignées dans le tableau suivant : x_i désigne le rang de l'année et y_i désigne la dépense.

Année	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65	3,55	3,50

On recherche une fonction qui rende compte relativement correctement du phénomène.

On dira qu'une fonction f est acceptable si pour chaque valeur x, on a :

$$\left|f(x_i) - y_i\right| \leqslant 10^{-1}.$$

a. Représenter le nuage de points $M_i\left(x_i,~y_i\right)$ dans le repère précédent.

b. Montrer que la fonction f est acceptable.

c. Le responsable financier affirme que « si l'évolution des dépenses se poursuit selon ce modèle, on pourrait espérer retrouver une facture de téléphone inférieure à 3000 euros ».

Êtes-vous d'accord avec cette affirmation ? Justifier.

EXERCICE 4 — 4 points

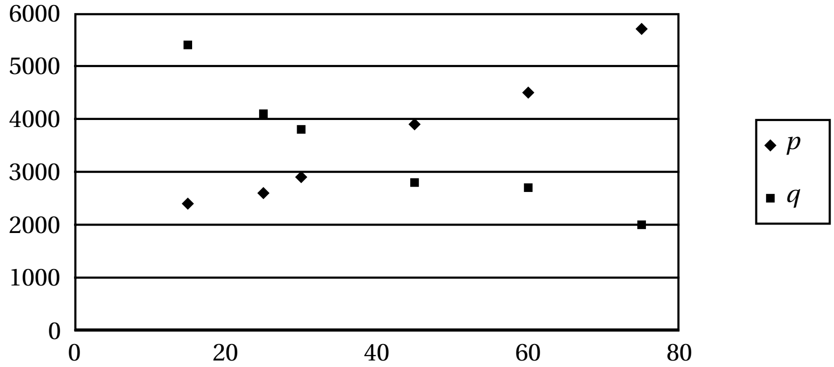
Commun à tous les candidats

Un éditeur spécialisé en ouvrages d'art diffuse sur une année 22 000 livres dont les prix varient de 15 à 75 euros.

On désigne par x le prix d'un livre, par p le nombre de livres **disponibles** et par q le nombre de livres **demandés**. Les résultats figurent dans le tableau ci-dessous :

x	15	25	30	45	60	75
p	2400	2600	2900	3900	4500	5700
q	5400	4100	3800	2800	2700	2000

On a tracé ci-dessous les nuages de points $(x_i~;~p_i)$ et $(x_i~;~q_i)$ dans un repère orthogonal du plan :



1. On pose $y = \ln p$.

a. Recopier et compléter le tableau : les résultats seront arrondis au millième.

x	15	25	30	45	60	75
p	2400	2600	2900	3900	4500	5700
$y = \ln p$						

b. *Dans cette question, le détail des calculs statistiques n'est pas demandé.*

À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite $\mathcal{D}$ d'ajustement affine de y en x.

Les coefficients seront arrondis au centième.

c. En utilisant cet ajustement, donner une estimation du nombre de livres disponibles pour un prix unitaire de 40 euros (*résultat arrondi à la centaine*).

2. On pose $z = \ln q$ et on admet l'égalité suivante $z = -0,02x + 8,73$.

En utilisant cette relation, donner une estimation du prix correspondant à une demande de 2800 livres (*résultat arrondi à l'unité*).

3. Le prix pour lequel l'offre est égale à la demande s'appelle le prix d'équilibre ; il est noté x_0.

a. Déterminer par le calcul le prix d'équilibre, arrondi à l'unité.

b. Les calculs précédents permettaient-ils de prévoir le résultat ?