Baccalauréat S Pondichéry juin 2000

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Un professeur se trouve en possession de 5 clefs de salles. Il se tient devant une porte et il sait que, parmi ses 5 clefs, 2 n'ouvrent pas la porte parce qu'elles sont défectueuses mais les autres le peuvent. Il veut alors les tester toutes, une à une. Le choix des clefs est effectué au hasard et sans remise. On appelle clef numéro x la clef utilisée au x-ième essai.

1. On appelle D_1 l'évènement : « La clef numéro 1 n'ouvre pas la porte ». Calculer sa probabilité.

2. On appelle D_2 l'évènement : « La clef numéro 2 n'ouvre pas la porte ». Calculer la probabilité que l'évènement D_2 se réalise, sachant que l'évènement D_1 est réalisé.
En déduire la probabilité de l'évènement $D_1 \cap D_2$.
On pourra, pour la suite de l'exercice, s'aider d'un arbre pondéré.

3. Quelle est la probabilité de l'évènement : « Les clefs numéros 1 et 2 ouvrent la porte et la clef numéro 3 ne l'ouvre pas » ?

4. Pour $1 \leqslant i < j \leqslant 5$, on note $(i\ ;\ j)$ l'évènement : « Les clefs qui n'ouvrent pas la porte sont les clefs numéros i et j », et $P(i\ ;\ j)$ la probabilité de cet événement.

a. Calculer $P(2\ ;\ 4)$.

b. Calculer $P(4\ ;\ 5)$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni dun repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$; unité graphique 4 cm.
On appelle B le point d'affixe i et M_1 le point d'affixe :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-\text{i}).$$

1. Déterminer le module et un argument de z_1.

2. Soit M_2 le point d'affixe z_2, image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
Déterminer le module et un argument de z_2.
Montrer que le point M_2 est un point de la droite (D) d'équation $y = x$.

3. Soit M_3 le point d'affixe z_3, image de M_2 par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}+2$.

a. Montrer que $z_3 = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}(1+i)$.

b. Montrer que les points M_1 et M_3 sont situés sur le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.

4. Construire, à la règle et au compas, les points M_1, M_2 et M_3 en utilisant les questions précédentes ; on précisera les différentes étapes de la construction.

5. À tout point M du plan d'affixe z (distinct de B), on associe le point M', d'affixe Z telle que $Z = \dfrac{1}{\mathrm{i} - z}$.
Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan (M distinct de B) tels que M' appartienne au cercle de centre O et de rayon 1.

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1. **a.** Pour $1 \leqslant n \leqslant 6$, calculer les restes de la division euclidienne de $3n$ par 7.

   b. Démontrer que, pour tout n, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.
   En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division par 7.

   c. À l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de $3^{1\,000}$ par 7.

   d. De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque?

   e. En déduire que, pour tout entier naturel n,3^n est premier avec 7.

2. Soit $U_n = 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{i=n-1} 3^i$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

   a. Montrer que si U^n est divisible par 7, alors $3^n - 1$ est divisible par 7.

   b. Réciproquement, montrer que si $3^n - 1$ est divisible par 7, alors U_n est divisible par 7.
   En déduire les valeurs de n telles que U_n soit divisible par 7.

PROBLÈME — **11 points**

Partie A

⋆ Étude de la fonction $g\,:\,x \longmapsto \ln\left(\dfrac{3+x}{3-x}\right)$

Soit la fonction g définie sur]- 3 ; 3[par : $g(x) = \ln\left(\dfrac{3+x}{3-x}\right)$.

1. Étudier la parité de la fonction g.

2. **a.** Calculer les limites de g en -3 et en 3.

   b. Étudier le sens de variation de g sur [0 ; 3 [.
   Dresser son tableau de variation sur] − 3 ; 3[.

3. soit $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormal d'unité graphique 4 centimètres. Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction g dans ce repère.

   a. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point dabscisse 0.

   b. Tracer dans le repère la courbe $(\mathscr{C})$ et sa tangente (T).

4. Étudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

5. **a.** Calculer la dérivée de la fonction $x \longmapsto xg(x)$.

   b. Calculer l'aire, exprimée en cm^2, de la portion de plan délimitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites déquations $x = 0$ et $x = 1$. On donnera la valeur exacte de cette aire, puis une valeur approchée au mm^2 près.

Partie B

⋆ Étude d'une courbe paramétrée

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 4 centimètres.

Soit la courbe paramétrée (Γ) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & t\left(3-t^2\right) \\ y(t) & = & tg(t) \end{array}\right. \quad \text{pour} \quad t \in [-2\ ;\ 2].$$

où g désigne la fonction étudiée dans la partie A. On note $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t)\ ;\ y(t)$.

1. **a.** Comparer d'une part $x(t)$ et $x(-\ t)$ et d'autre par $y(t)$ et $y(-\ t)$.

   b. Par quelle transformation peut-on passer de $M(t)$ à $M(-t)$?
   En déduire que (Γ) admet un axe de symétrie que l'on précisera.

2. Étudier la fonction $x\ :\ t \longmapsto t(3-t^2)$ et dresser son tableau de variation sur $[0\ ;\ 2]$.

3. En utilisant la partie **A.**, montrer que la fonction $t \longmapsto y(t)$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;2]$.

4. Dresser le tableau des variations conjointes des fonctions $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$ sur $[0\,;2]$.

5. Pour quelles valeurs de t l'abscisse de M(t) est-elle nulle ?
   Préciser alors les ordonnées des points correspondants de (Γ).

6. Tracé de (Γ)

   a. Placer, dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, les points M(0), M(1), M$\left(\sqrt{3}\right)$ et M(2) qui correspondent respectivement aux valeurs 0, 1, $\sqrt{3}$ et 2 du paramètre t.

   b. Préciser un vecteur directeur des tangentes à (Γ) aux points M(0) et M(1) et tracer ces tangentes.

   c. Tracer (Γ).