Baccalauréat S Pondichéry juin 2002

EXERCICE 1 **4 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$; unité graphique 2 cm. On désigne par A le point d'affixe $z_{\text{A}} = 1$, et par $(\mathscr{C})$ le cercle de centre A et de rayon 1.

Partie A

Soit F le point d'affixe 2, B le point d'affixe $z_{\text{B}} = 1+\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$ et E le point d'affixe $(1+z_{\text{B}}^2)$.

1. **a.** Montrer que le point B appartient au cercle $(\mathscr{C})$.

   b. Déterminer une mesure en radians de l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{\text{AF}}\ ;\ \overrightarrow{\text{AB}}\right)$. Placer le point B.

2. **a.** Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes $(z_{\text{B}} - z_{\text{A}})$ et $(z_{\text{E}} - z_{\text{A}})$.

   b. En déduire que les points A , B et E sont alignés.

3. Placer le point E.

Partie B

Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 1$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z' où $z' = 1 + z^2$.

1. Pour $z \neq 0$ et $z \neq 1$, donner, à l'aide des points A, M et M', une interprétation géométrique d'un argument du nombre complexe $\dfrac{z'-1}{z-1}$.

2. En déduire que A, M et M' sont alignés si et seulement si $\dfrac{z^2}{z-1}$ est un réel.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement obligatoire

Partie A

Une urne contient n boules blanches ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$), 5 boules rouges et 3 boules vertes.
On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne .

1. Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches ?

2. On note $p(n)$ la probabilité de tirer deux boules de même couleur.

   a. Montrer que $p(n) = \dfrac{n^2 - n + 26}{(n+8)(n+7)}$

   b. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p(n)$. Interpréter ce résultat.

Partie B

Pour les questions suivantes $n = 4$.

1. Calculer $p(4)$.

2. Un tirage consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

   Un joueur effectue deux tirages indépendants, en remettant dans l'urne avant le second tirage les deux boules tirées la première fois. Il mise au départ la somme de 30 euros.

Pour chaque tirage :

- si les deux boules sont de même couleur, il reçoit alors 40 euros,

- si elles sont de couleurs différentes, il reçoit alors 5 euros.

On appelle gain du joueur la différence, à l'issue des deux tirages, entre la somme reçue par le joueur et sa mise initiale (ce gain peut être positif ou négatif).

On désigne par X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance de X.

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Calculer le P.G.C.D. de $4^5 - 1$ et de $4^6 - 1$.

Soit u la suite numérique définie par :
$u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n.$$

2. Calculer les termes u_2, u_3 et u_4 de la suite u.

3. **a.** Montrer que la suite u vérifie, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 4u_n + 1$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est un entier naturel.

c. En déduire, pour tout entier naturel n, le P.G.C.D. de u_n et u_{n+1}.

4. Soit v la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + \frac{1}{3}$.

a. Montrer que v est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0.

b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c. Déterminer, pour tout entier naturel n, le P.G.C.D. de $4^{n+1} - 1$ et de $4^n - 1$.

PROBLÈME — 11 points

La partie **B** peut être traitée indépendamment de la partie **A**.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$; unité graphique : 2 cm.
Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{e^x}{e^{nx}(1 + e^x)}.$$

On désigne par $\mathcal{C}\backslash$ la courbe représentative de f_n dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

Dans cette partie, on s'intéresse seulement aux fonctions f_0 et f_1 correspondant respectivement à $n = 0$ et $n = 1$.

On considère d'abord la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$.

1. **a.** Déterminer la limite de $f_0(x)$ quand x tend vers $-\infty$.
   b. Déterminer la limite de $f_0(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
   c. En déduire les asymptotes de $\mathcal{C}_0$.
2. Montrer que le point K $\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_0$
3. Étudier les variations de f_0.
4. **a.** Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_0$ au point K.
   b. Justifier que, pour étudier la position de la tangente T par rapport à la courbe $\mathcal{C}_0$, il suffit d'étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $g(x)$, où $g(x) = 2\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x - 2 - x$.
   c. Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.
   d. Déterminer, en les justifiant, les signes de $g''(x)$, $g'(x)$ et $g(x)$ suivant les valeurs de x.
   e. En déduire la position de la tangente T par rapport à la courbe $\mathcal{C}_0$.
5. Tracer $\mathcal{C}_0$ et T dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
6. **a.** Montrer que pour tout réel x, les points $M(x\,;\,f_0(x))$ et $M'\left(x\,;\,f_1(x)\right)$ sont symétriques par rapport à la droite (d) d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.
   b. Comment obtient-on $\mathcal{C}_1$ à partir de $\mathcal{C}_0$? Tracer $\mathcal{C}_1$.

Partie B

Étude de la suite u définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que $u_0 = \ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$.
2. Montrer que $u_0 + u_1 = 1$. En déduire u_1 .
3. Montrer que la suite u est positive.
4. On pose $k(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$,
   a. Montrer que, pour tout x réel, $k(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{nx}(1+\mathrm{e}^x)}$.
   b. Etudier le signe de $k(x)$ pour $x \in [0\,;\,1]$.
   c. En déduire que la suite u est décroissante.
5. **a.** Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :
   $$u_{n-1} + u_n = \frac{1-\mathrm{e}^{-(n-1)}}{n-1}.$$
   b. Calculer u_2.
6. Soit v la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 2 par :
   $$v_n = \frac{u_{n-1} + u_n}{2}.$$
   a. Calculer la limite de v_n quand n tend vers $+\infty$.
   b. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :
   $$0 \leqslant u_n \leqslant v_n.$$
   c. En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.