

CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

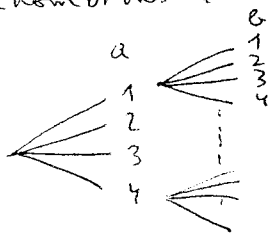
**ÉLÉMENTS DE CORRECTION
 BARÈME PROPOSÉ**

N.B. : Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. Les règles de confidentialité habituelles s'appliquent à son contenu.

Exercice 1 (4 points)

1. $\vec{U} \perp \vec{V} \Leftrightarrow \vec{U} \cdot \vec{V} = 0 \Leftrightarrow a(1+b) - 5 + b(1-a) = 0$
 (repte orthogonale) $\Leftrightarrow a+b = 5$

Dénombrons l'univers Ω par un arbre :



$\text{card } \Omega = 15$

Les tirages sont faits au hasard :
 les éventualités sont équiprobables.

Parmi elles, 4 appartiennent à l'événement étudié :

$(1; 4), (2; 3), (3; 2), (4; 1)$

La probabilité cherchée est égale à : $\frac{4}{15} = \frac{1}{4}$

0,75

2. a. $p(A_1) = p(A_0 \cap B_N) = p(A_0) \times p(B_N)$ (indépendance)
 $= \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$

0,5

en notant : A_0 : A obtient des vecteurs orthogonaux
 B_N : B ————— non orthogonaux

$p(B_1) = p(A_1) = \frac{3}{16}$ par symétrie.

• $p(A_1 \cup B_1 \cup C_1) = 1$ et, les év^{ts} étant incompatibles
 $p(A_1) + p(B_1) + p(C_1) = 1$ d'où $p(C_1) = 1 - 2 \times \frac{3}{16} = \frac{5}{8}$

Calcul de $p(C_n)$

1

b $p(C_{n+1}) = p(C_n \cap \overline{A_{n+1} \cup B_{n+1}})$
 $= p(C_n) \times p(\overline{A_{n+1} \cup B_{n+1}} | C_n)$
 $= p(C_n) \times p(\overline{A_1 \cup B_1}) = p(C_n) \times p(C_1)$
 puisque les épreuves sont indépendantes et identiques

ainsi : $p(C_{n+1}) = p(C_n) \times \frac{5}{8}$

La suite de terme général $p(C_n)$ est donc géométrique, de raison $\frac{5}{8}$ et de premier terme

$p(C_1) = \frac{5}{8}$.

Pour tout n de \mathbb{N}^* , on a donc : $p(C_n) = \left(\frac{5}{8}\right)^n$

Calcul de $p(A_n)$

0,5

$p(A_{n+1}) = p(C_n \cap A_{n+1}) = p(C_n) \times p(A_{n+1} | C_n)$
 $= p(C_n) \times p(A_1)$ (voir remarque précédente)
 $= p(C_n) \times \frac{3}{16}$

d'où $p(A_n) = p(C_{n-1}) \times \frac{3}{16} = \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} \times \frac{3}{16}$

3. a. La suite de terme général $p(A_n)$ est géométrique de raison $\frac{5}{8}$, donc strictement inférieure à 1 en valeur absolue.

0,5

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(A_n) = 0$

b. $p(A_n) \leq 0,01$ équivaut successivement à :

$\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} \times \frac{3}{16} \leq 0,01$; $\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} \leq \frac{0,16}{3}$;

$(n-1) \ln \frac{5}{8} \leq \ln \left(\frac{0,16}{3}\right)$ ln étant croissante sur \mathbb{R}^*_+

$n-1 \geq \frac{\ln \left(\frac{0,16}{3}\right)}{\ln \frac{5}{8}}$ ($\ln \frac{5}{8} < 0$) (le quotient est strictement entre 6 et 7 et n est entier)

$n-1 \geq 7$

$n \geq 8$.

Le plus petit entier cherché est 8.

0,75

**ÉLÉMENTS DE CORRECTION
 BARÈME PROPOSÉ**

N.B. : Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. Les règles de confidentialité habituelles s'appliquent à son contenu.

O B L I G A T O I R E

Exercice 2 : (5 points)

Résolution (0,5)

1. $\Delta = -4$, donc l'équation admet 2 solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \sqrt{3} + i \text{ et } z_2 = \sqrt{3} - i$$

$$a = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ et } b = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

critère (0,25)

2.a. $a' = e^{i\frac{\pi}{3}} \times a$

$$\text{donc } a' = 2e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3})} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$$

2.b. $b' = -\frac{3}{2}b = -\frac{3}{2}(\sqrt{3} - i) = \frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

$$(\text{ou } b' = -\frac{3}{2} \times 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = -3e^{-i\frac{\pi}{6}} = 3e^{i\frac{5\pi}{6}})$$

(0,5)

(0,5)

3.a.

C est le centre du cercle circonscrit à $OA'B'$, de rayon R , donc : $OC^2 = R^2 \Leftrightarrow |c|^2 = R^2$

$$\text{et } |c|^2 = R^2 \Leftrightarrow \boxed{c\bar{c} = R^2}$$

On a également : $A'C^2 = R^2 \Leftrightarrow |c - a'|^2 = R^2$

$$\text{et } |c - a'|^2 = R^2 \Leftrightarrow (c - 2i)(\bar{c} - 2i) = R^2 \Leftrightarrow \boxed{(c - 2i)(\bar{c} + 2i) = R^2}$$

De même : $B'C^2 = R^2 \Leftrightarrow |c - b'|^2 = R^2$

$$|c - b'|^2 = R^2 \Leftrightarrow \boxed{(c + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i)(\bar{c} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i) = R^2}$$

(0,75)

dont 0,25

pour une

rédaction

convenable

0,5

$$\underline{3.b.} \quad (c-2i)(\bar{c}+2i) = R^2 \Leftrightarrow c\bar{c} + 2i(c-\bar{c}) - 4i^2 = R^2$$

$$\text{Or, } c\bar{c} = R^2, \text{ donc } 2i(c-\bar{c}) = -4, \text{ soit :}$$

$$\boxed{c - \bar{c} = 2i}$$

$$(c + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i)(\bar{c} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i) = R^2$$

$$\Leftrightarrow c\bar{c} + \frac{3\sqrt{3}}{2}(c+\bar{c}) + \frac{3}{2}i(c-\bar{c}) + (\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i)(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i) = R^2$$

0,75

$$\Leftrightarrow R^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}(c+\bar{c}) + \frac{3}{2}i(2i) + |\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i|^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2}(c+\bar{c}) - 3 + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{c + \bar{c} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}}$$

$$\underline{3.c.} \quad \begin{cases} c - \bar{c} = 2i \\ c + \bar{c} = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c = 2i - \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ 2\bar{c} = -\frac{4\sqrt{3}}{3} - 2i \end{cases}$$

0,75

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -\frac{2\sqrt{3}}{3} + i \\ \bar{c} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} - i \end{cases}$$

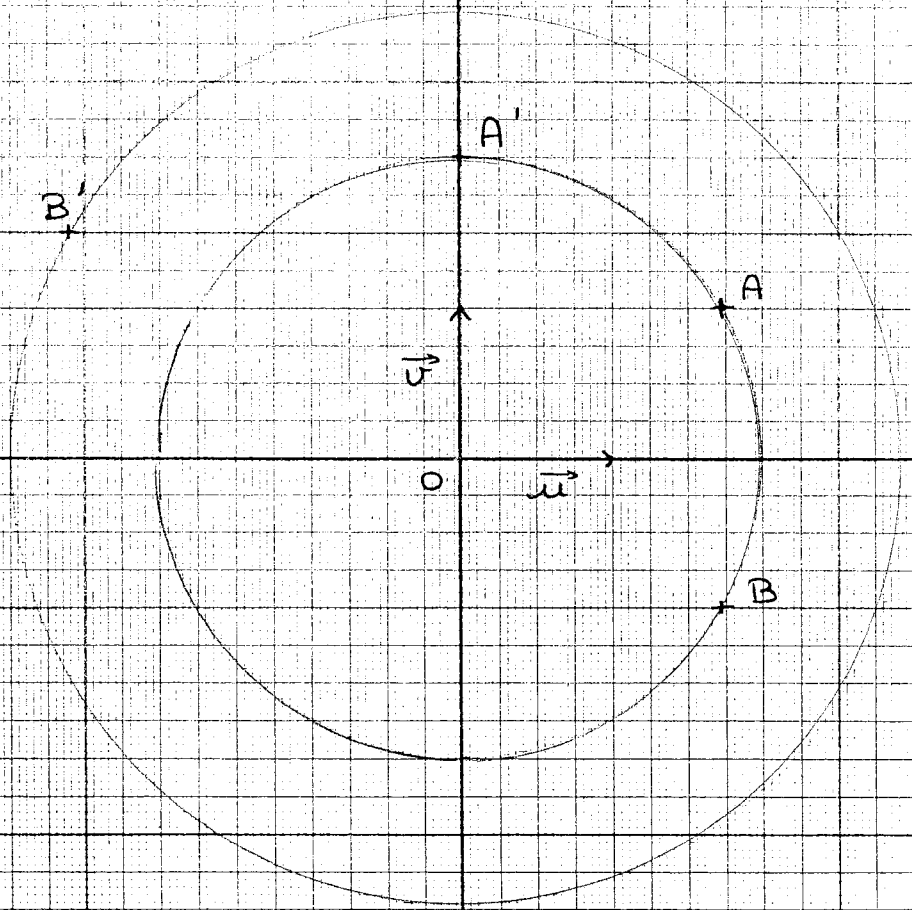
$$\boxed{c = -\frac{2\sqrt{3}}{3} + i}$$

$$R^2 = |c|^2 = \frac{4 \times 3}{4} + 1 = 4$$

$$\text{donc } \boxed{R = 2}$$

↑ 5/12

Figure: $(0,5)$



**ÉLÉMENTS DE CORRECTION
 BARÈME PROPOSÉ**

N.B. : Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. Les règles de confidentialité habituelles s'appliquent à son contenu.

SPÉCIALITÉ
Exercice 2 (5 points)

1. a. $6x(-1) + 7x1 = 1$

$6x(-57) + 7x57 = 57$

$(x_0; y_0) = (-57; 57)$

b. (x, y) est solution de (E)

$\Leftrightarrow 6x + 7y = 57$

$\Leftrightarrow 6(x + 57) + 7(y - 57) = 0$

Nécessairement $7 \mid 6(x + 57)$

or $7 \wedge 6 = 1$ donc $7 \mid x + 57$ (Gauss)

et $x + 57 = 7k \quad (k \in \mathbb{Z})$

de même, $y - 57 = 6l \quad (l \in \mathbb{Z})$

avec nécessairement : $6 \times 7k + 7 \times 6l = 0$
 et $k = -l$

reciproquement, tout couple $(-57 + 7k, 57 - 6k)$,

où $k \in \mathbb{Z}$, est solution. $\mathcal{S} = \{(-57 + 7k, 57 - 6k), k \in \mathbb{Z}\}$

2. $M(x, y, z) \in P \cap (0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 7y + 8z = 57 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 7y = 57 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -57 + 7k \\ y = 57 - 6k \\ z = 0 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

$(x, y) \in \mathbb{N}^2 \Leftrightarrow \begin{cases} -57 + 7k \geq 0 \\ \text{et} \\ 57 - 6k \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq 9 \\ \text{et} \\ k \leq 9 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$
 $\Leftrightarrow k = 9$

Un seul point répond à la question :

Ce point a pour coordonnées $(-57 + 7 \times 9, 57 - 6 \times 9, 0)$

soit : $(6, 3, 0)$

0,25

L'expression finale n'est pas la même pour tous les candidats, bien sûr !

1

0,75

0,5

3. a. Si y était pair, 57 serait pair comme somme de trois entiers pairs, donc y est impair.

0,75

b. Écrivons la division euclidienne de $p+3$ par 3
 $p+3 = 3q + r$, avec $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0, 1, 2\}$
 $M \in P$, donc :

$$6x + 7(2p+1) + 8(-p+3q+r) = 57$$

$$6x + 6p + 24q + 8r + 1 = 57$$

donc $3 \mid 8r+1$. La seule valeur possible pour r est bien 1 .

0,75

c. Écrivons l'égalité du b. pour $r=1$. On obtient
 $6x + 6p + 24q = 42$ soit : $x + p + 4q = 7$

x, p et q étant des entiers naturels

$$x+p \geq 0 \quad \text{et} \quad x+p+4q \geq 4q$$

$$\text{donc} \quad 7 \geq 4q \quad \text{et} \quad \frac{7}{4} \geq q$$

$$q \in \mathbb{N}, \text{ donc } q=0 \text{ ou } q=1$$

d. On a donc démontré que, pour tout point du plan \mathbb{P} de coordonnées x, y et z dans \mathbb{N}^3 ,

$$\begin{cases} x = 7 - p - 4q \\ y = 2p + 1 \\ z = 1 - p + 3q \end{cases} \quad \text{avec } p \in \mathbb{N} \text{ et } q \in \{0, 1\}$$

$$\text{soit } 1) \begin{cases} x = 7 - p \\ y = 2p + 1 \\ z = 1 - p \end{cases} \quad p \in \mathbb{N} \quad \text{ou} \quad 2) \begin{cases} x = 3 - p \\ y = 2p + 1 \\ z = 4 - p \end{cases} \quad p \in \mathbb{N}$$

• Réciproquement, les points ainsi définis vérifient l'équation de P ($6x + 7y + 8z = 57$)

Déterminons, pour chaque cas les valeurs de l'entier p telles que x, y et z soient dans \mathbb{N} .

$$1) \begin{cases} 7-p \geq 0 \\ 2p+1 \geq 0 \\ 1-p \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \geq p \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} p=0 \\ \text{ou} \\ p=1 \end{cases}$$

On obtient les points de coordonnées $(7; 1; 1)$ et $(6; 3; 0)$

1

**ÉLÉMENTS DE CORRECTION
BARÈME PROPOSÉ**

N.B. : Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. Les règles de confidentialité habituelles s'appliquent à son contenu.

$$2/ \begin{cases} 3-p > 0 \\ 2p+1 > 0 \\ 4-p > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 > p \Leftrightarrow \begin{cases} p=0 \\ p=1 \\ p=2 \\ p=3 \end{cases}$$

qui donnent les points de coordonnées
(3; 1; 4), (2; 3; 3), (1; 5; 2), (0; 7; 1)

Les points de P cherchés sont les 6 points de coordonnées
(7; 1; 1) (6; 3; 0) (3; 1; 4) (2; 3; 3); (1; 5; 2) et (0; 7; 1)

**ÉLÉMENTS DE CORRECTION
 BARÈME PROPOSÉ**

N.B. : Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. Les règles de confidentialité habituelles s'appliquent à son contenu.

PROBLEME : (11 points)

5 points

1

dont 0,25 pour une bonne rédaction

0,5

0,5

0,5

Partie A :

1.a. Pour x réel, $f(x) = \frac{1}{2}(x + e^{2x} - xe^{2x})$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{2x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}xe^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + e^{2x}) &= -\infty \end{aligned} \right\} \text{ donc } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty}$$

Pour x réel, $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}(xe^{-2x} + (1-x))$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-2x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}xe^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}e^{2x} &= +\infty \end{aligned} \right\} \text{ donc } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty}$$

1.b. Pour x réel, $f(x) - \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1-x)e^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x}$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}e^{2x} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}xe^{2x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{4}xe^x = 0 \end{aligned} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) - \frac{x}{2} \right) = 0$$

La droite Δ d'équation $y = \frac{x}{2}$ est donc asymptote à C en $-\infty$.

$f(x) - \frac{x}{2} \geq 0$ sur $[1; +\infty[$ et $f(x) - \frac{x}{2} \leq 0$ sur $] -\infty; 1]$
 Donc C est au-dessous de Δ sur $] -\infty; 1]$ et C est au-dessus de Δ sur $[1; +\infty[$.

2. Les fonctions polynômes et exp sont dérivable sur \mathbb{R} , donc f est dérivable sur \mathbb{R} par produit et somme de telles fonctions.

Pour x réel, $\boxed{f'(x) = \frac{1}{2}(1 + (1-2x)e^{2x})}$

0,5

3.a. u dérivable sur \mathbb{R} et $u'(x) = -4xe^{2x}$
 $u'(x)$ est positif sur $]-\infty; 0]$, donc la fonction u est croissante sur $]-\infty; 0]$
 $u'(x)$ est négatif sur $[0; +\infty[$, donc la fonction u est décroissante sur $[0; +\infty[$.

1

(si bonne rédaction)

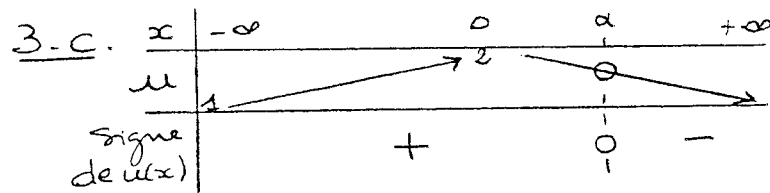
3.b. la fonction u est dérivable et strictement décroissante sur $[0; 1]$ donc réalise une bijection de $[0; 1]$ sur $[u(1); u(0)]$.

Or, $u(1) = 1 - e^2$, et $u(0) = 2$
 0 est compris entre $u(1)$ et $u(0)$, donc l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; 1]$

0,25

$u(0,63) \approx 0,083$, et $u(0,64) \approx -0,007$
 Une valeur approchée de α par excès à 10^{-2} près est donc : $\boxed{0,64}$

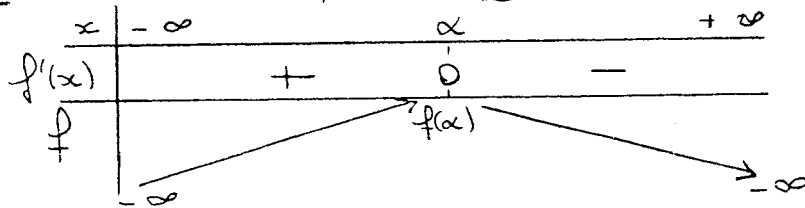
0,5



$\left[\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 1 \right. \text{ (car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{2x} = 0 \left. \right)$

0,25

4. Pour x réel, $f'(x) = \frac{1}{2}u(x)$. $f'(x)$ a même signe que $u(x)$.



3,5 points

0,5

Partie B

1. $M_t(t; e^t)$

La tangente à Γ au point M_t a pour équation:

$y = e^t + e^t(x - t)$

Pour $x = 0$, $y = e^t(1 - t)$

Donc le point d'intersection de la tangente à Γ au point M_t et de l'axe des ordonnées est:

0,25

$\boxed{N_t = (0; e^t(1 - t))}$

dessin +
 construction (0,5)

(0,5)

2.a. $M_{-2}(-2; e^{-2}); P_{-2}(-2; -2); N_{-2}(0; 3e^{-2})$
 G_{-2} est le barycentre de $(O; 1); (M_{-2}; 1); (P_{-2}; 1); (N_{-2}; 1)$
 Soit I_{-2} le milieu de $[ON_{-2}]$, J_{-2} le milieu de $[M_{-2}; P_{-2}]$.
 G_{-2} est le barycentre de $(I_{-2}; 2); (J_{-2}; 2)$, donc
 G_{-2} est le milieu de $[I_{-2}J_{-2}]$.

2.b. Soit I_t milieu de $[ON_t]$, alors

$$I_t \left(0; \frac{e^t}{2}(1-t) \right)$$

Soit J_t milieu de $[M_t P_t]$, alors $J_t \left(t; \frac{e^t+t}{2} \right)$

G_t est le milieu de $[I_t J_t]$, alors

$$G_t \left(\frac{t}{2}; \frac{2e^t - te^t + t}{4} \right)$$

3.
$$\begin{cases} x = \frac{t}{2} \\ y = \frac{2e^t - te^t + e^t}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2x \\ y = f(x) \end{cases}$$

l'ensemble des points $G_t (t \in \mathbb{R})$ est la courbe C.

2,5 points

(1)

Partie C.

1. Voir annexe

$$2. I = \int_0^1 \left(f(x) - \frac{x}{2} \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{2} (1-x) e^{2x} dx$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x) e^{2x} dx. \text{ Posons } u(x) = 1-x \text{ et } v'(x) = e^{2x}$$

$$\text{alors: } u'(x) = -1 \text{ et } v(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$$

Par intégration par parties,

$$I = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{1}{2} (1-x) e^{2x} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx \right)$$

$$I = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 \right) = \frac{e^2 - 3}{8}$$

$$A = I \times 4 \text{ cm}^2 = \boxed{\frac{e^2 - 3}{2} \text{ cm}^2}$$

(1,5)

si bonne justification

(0,75)

12/12

annexe problème

