

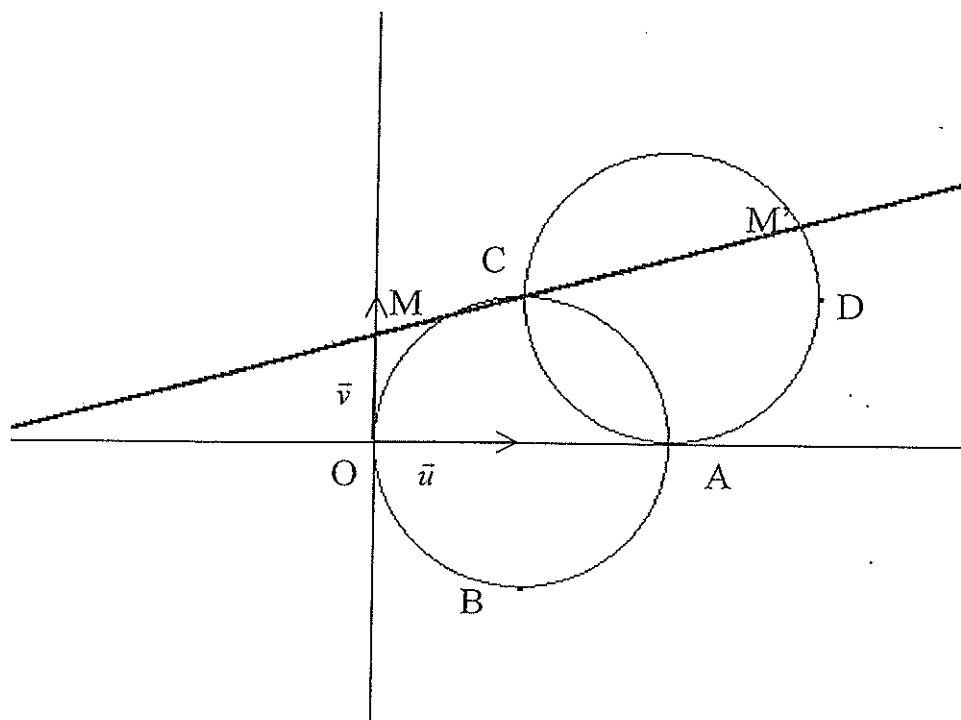
CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

**ÉLÉMENTS DE CORRECTION
 ET BARÈME INDICATIF PROPOSÉS**

N.B. : Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. Les règles de confidentialité habituelles concernant les travaux des jurys, des commissions d'entente et des permanences téléphoniques s'appliquent à son contenu.

Exercice 1, commun à tous les candidats. Sur 4 points.



1 point, y compris la figure avec les points A, B, C et le cercle C.

1. a.
- b. $-1-i = -i(1-i)$

1 point

2. a. Une mesure de cet angle est $-\frac{\pi}{2}$. Si on note d l'affixe de D, on peut écrire :
 $d-2 = -i(-1+i)$
 Donc $d = 3+i$.
 C' est le cercle de diamètre $[CD]$.

2 points, y compris la figure explicitement demandée

3. a. Cette écriture fait apparaître l'affixe du milieu Ω de $[OA]$ et une mesure de l'angle $(\overline{\Omega A}, \overline{\Omega M})$.
- b. $z'-2 = -i(z-2)$ s'écrit : $z' = 2 - i(1 + e^{i\theta} - 2)$
 et finalement : $z' = 2 + i + e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})}$, qui fait bien apparaître C' .

c. $\frac{z'-c}{z-c} = \frac{1+e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}}{-i+e^{i\theta}}$, qui se simplifie en : $\frac{z'-c}{z-c} = \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

Exercice 2, pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité. Sur 5 points.

0,5 point
 1,5 points

1. Le triangle ABC est équilatéral.
2. La droite (AB) est perpendiculaire à (CI) par définition et à (OI) puisque le triangle AOB est rectangle isocèle. Elle est donc perpendiculaire au plan (OCI), donc orthogonale à (OH). Pour la suite, (OH) est perpendiculaire à (CI) et orthogonale à (AB), donc perpendiculaire au plan (ABC).

On peut poursuivre le raisonnement « en tournant » autour de (OH) ou montrer que, dans le triangle rectangle OCI, les segments déterminés par la hauteur sur l'hypoténuse sont dans un rapport 2, qui caractérise H comme centre de gravité, donc orthocentre, du triangle équilatéral ABC.

1,5 points

3. a. $V = \frac{1}{3} \times a \times \frac{a^2}{2}$, qu'on écrit : $V = \frac{a^3}{6}$.

Le côté du triangle équilatéral ABC est $a\sqrt{2}$. Son aire est $S = \frac{1}{2} \times a\sqrt{2} \times \frac{a\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}$, qu'on écrit : $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

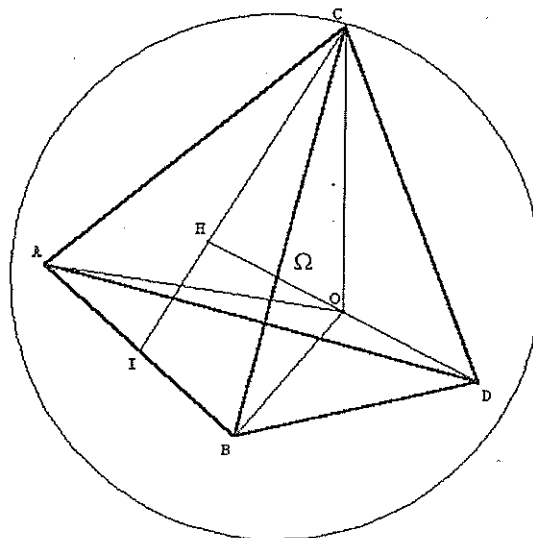
b. $OH = \frac{3V}{S}$, et donc $OH = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

1,5 points

4. a. On a donné plus haut une définition barycentrique de H.
- b. Cette longueur commune est $a\sqrt{2}$.
- c. Ω appartient au plan médiateur de chacune des segments [AB], [BC], [CA], donc à leur intersection (OH). On peut écrire $\Omega A = \Omega D$ comme une équation :

$$\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 + \left(x + \frac{a}{3}\right)^2 + \left(x + \frac{a}{3}\right)^2 = (x - a)^2 + x^2 + x^2,$$

dont la solution est $\frac{a}{6}$. Le point Ω est le milieu de [OH] (ce qui peut aussi être trouvé avec un raisonnement barycentrique).



Exercice 2, pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité. Sur 5 points.

1,5 points

1. a. Des vecteurs normaux à ces plans ne sont pas colinéaires.
 b. On peut paramétrer par x ou z de façon presque immédiate.
 c. En considérant le point M de Δ d'abscisse 1 et son projeté N sur l'axe Ox , on trouve la distance MN égale à $\sqrt{7}$. Ce nombre est aussi la tangente du demi-angle au sommet du cône. D'où l'équation de celui-ci.

1 point

2. L'hyperbole est l'intersection de Γ avec un plan parallèle à l'axe du cône (une équation cartésienne d'un tel plan a un coefficient de x nul), le cercle est l'intersection du cône avec un plan perpendiculaire à Ox (donc d'équation $x = a$).

1,5 points

3. a. Le tableau ci-dessous donne les restes modulo 7 des entiers compris entre 0 et 6 :

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	9	16	25	36
Reste modulo 7	0	1	4	2	2	4	1

- b. Le tableau précédent donne la réponse à la question a. En additionnant deux quelconques des restes recensés à la troisième ligne, on trouve 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, et on ne trouve 0 qu'avec la somme $0 + 0$.

1 point

4. a. Les coordonnées de A vérifient : $b^2 + c^2 = 7a^2$.
 7 divise donc le premier membre, donc chacun des entiers b et c . Donc 49 divise le deuxième membre, donc 7 divise a^2 . Comme 7 est premier, 7 divise a .
 b. Une méthode de « descente » conduit au résultat.

Problème, commun à tous les candidats. Sur 11 points.

2 points

Partie A

1. L'unique solution de l'équation différentielle vérifiant $f(0) = N_0$ est définie par : $f(t) = N_0 e^{at}$.
2. La condition $f(T) = 2f(0)$ s'écrit : $a = \frac{1}{T} \ln 2$, d'où le résultat.

Partie B

3 points pour la question 1

1. a. g étant strictement positive et dérivable, g' l'est aussi. On écrit : $\left(\frac{1}{g}\right)'(t) + a\left(\frac{1}{g}\right)(t) = \frac{-g'(t) + ag(t)}{(g(t))^2}$ qui, en tenant compte de l'hypothèse exprimée par (E), donne l'implication demandée.
 b. Les solutions de (E') sont les fonctions f définies sur \mathbb{R} pour lesquelles on peut trouver un réel k tel que, pour tout réel t , $f(t) = \frac{1}{M} + ke^{-at}$.
 c. Si h est une solution strictement positive de (E'), h est dérivable sur \mathbb{R} et ne prend pas la valeur 0. Les calculs précédents

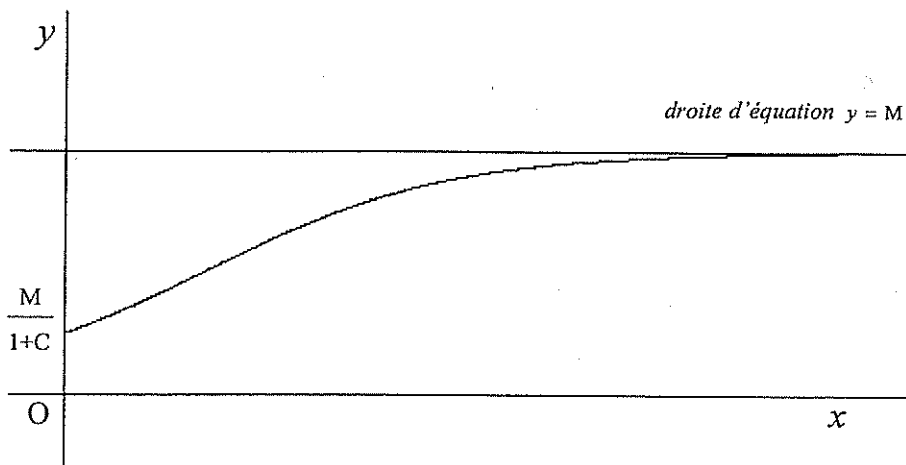
Cette « réciproque ne va nullement de soi.

4 points

Cette courbe n'est pas demandée. Elle tient lieu de résumé de l'étude des variations.

peuvent alors être faits « à l'envers ».

2. a. Le dénominateur de l'expression définissant g peut être lu comme l'image du réel t par une fonction positive décroissante ayant pour limite 1 en $+\infty$. Cette observation fournit les résultats.
- b. La fonction g' a le signe de g , qui est donc croissante.



La fonction g est continue et croissante sur \mathbb{R}^+ . Son minimum est $\frac{M}{1+C}$ et elle prend des valeurs supérieures à $\frac{M}{2}$. Donc elle prend la valeur $\frac{M}{2}$, en une seule occasion.

c. De $g' = ag - \frac{a}{M}g^2$, on déduit l'égalité demandée. Le signe de g'' est celui de $1 - \frac{2g}{M}$. L'existence et l'unicité de t_0 étaient prouvées par des considérations d'analyse. On trouve la valeur de t_0 en résolvant l'équation $\frac{M}{2} = \frac{M}{1+Ce^{-at}}$. Elle s'écrit aussi : $Ce^{-at} = 1$, et a pour solution $t_0 = \frac{1}{a} \ln C$.

Cette question peut être minimisée, car elle n'apporte rien.

d. Cette valeur moyenne est donnée par :

$$m = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \frac{M}{1+Ce^{-at}} dt, \text{ et elle s'écrit finalement : } m = aM \frac{\ln(2C) - \ln(C+1)}{\ln C}.$$

Partie C

2 points (car l'ensemble est peut-être un peu touffu)

1. On trouve $N_0 = 1$, $T = 0,5$ et $a = 2 \ln 2$.
2. Là encore, il ne s'agit que d'une identification.
3. *On n'a pas reproduit ci-dessous la figure à rendre, sur laquelle on perçoit clairement la réponse à la question suivante et la bonne adéquation du second modèle.*

Les deux premières heures sont la période de validité apparente de ce premier modèle.

