

# CORRIGE

**Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.**

## ELEMENTS DE CORRECTION

Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. La règle de confidentialité relative aux commissions d'entente et aux travaux des jurys s'applique à son contenu.

## EXERCICE 1 (5 points)

1	2	3	4	5
V	F	V	F	V

## EXERCICE 2 (5 points)

1) a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty$  d'où  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

Pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = e \frac{x^2}{e^x}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

L'axe des abscisses est asymptote à la courbe  $C$  en  $+\infty$ .

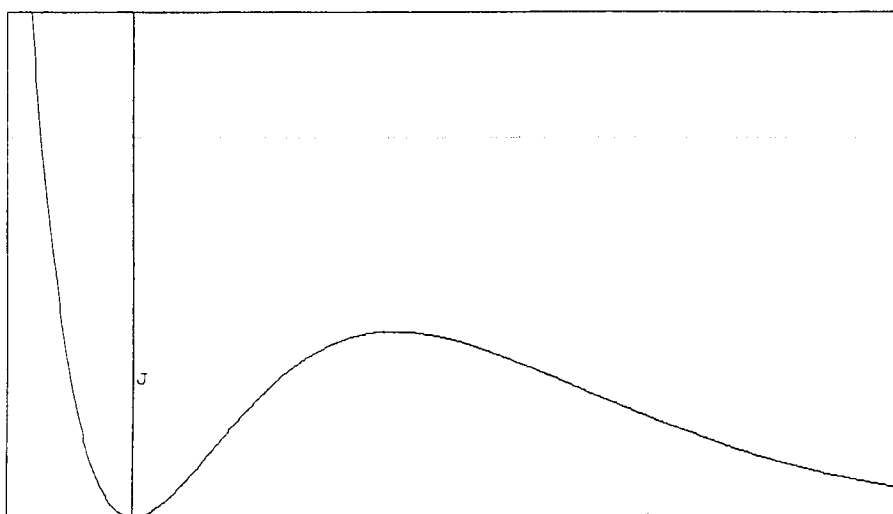
b) La fonction carré et la fonction composée  $\exp u$ , où  $u$  est une fonction affine, sont dérivables sur  $\mathbf{R}$ .  $f$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$  comme produit de fonctions dérivables.

Pour tout réel  $x$ , on obtient  $f'(x) = (2x - x^2) e^{1-x}$ .

c)  $f'(x)$  est négatif sur  $] -\infty ; 0[$  et sur  $] 2 ; +\infty [$  et  $f'(x)$  est positif sur  $] 0 ; 2[$ . D'où les variations de  $f$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$
$f(x)$	$+\infty$	$0$	$\frac{4}{e}$	$0$

Tracé de la courbe  $\mathcal{C}$ .



- 2) a) Une intégration par parties donne pour tout entier  $n$  non nul  $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$ .
- b) Avec une intégration par parties, on obtient  $I_1 = e - 2$ .  
Avec la question a)  $I_2 = -1 + 2I_1 = 2e - 5$ .
- c) La fonction  $f$  est positive sur l'intervalle  $[0; 1]$ .  $I_2$  représente l'aire, en unité d'aire du domaine plan délimité par la courbe  $\mathcal{C}$ , l'axe des abscisses, et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = 0$ .
- 3) a) Si  $x \in [0; 1]$ ;  $0 \leq 1 - x \leq 1$ . La fonction exponentielle est croissante donc  $1 \leq e^{1-x} \leq e$ .  
 $x^n$  est positif donc pour tout  $x$  de  $[0; 1]$ , on a  $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq e x^n$ .
- b) Par intégration de ces inégalités sur  $[0; 1]$ , on obtient  $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$ .  
Par application du théorème des gendarmes la limite de la suite  $(I_n)$  est 0.

### EXERCICE 3 - Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité (5 points)

- 1) a)  $\arg\left(z' \times \frac{1}{z'}\right) = \arg(1) = 0$  à  $2k\pi$  près. Ainsi  $\arg\left(\frac{1}{z'}\right) = -\arg(z')$  à  $2k\pi$  près et  
 $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$  à  $2k\pi$  près.
- b)  $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg(c-a) - \arg(b-a) = (\vec{u}, \vec{AC}) - (\vec{u}, \vec{AB}) = (\vec{AB}, \vec{AC})$  à  $2k\pi$  près.
- 2) a)  $\arg(z') = -\arg(\bar{z}) = -(-\arg(z)) = \arg(z)$  à  $2k\pi$  près.  
Géométriquement cela signifie que :  $(\vec{u}, \vec{OM}') = (\vec{u}, \vec{OM})$ , donc que les vecteurs  $\vec{OM}'$  et  $\vec{OM}$  sont colinéaires et de même sens ou encore que  $M$  et  $M'$  sont sur une même demi-droite d'origine  $O$ .
- b)  $f(M) = M \Leftrightarrow z = \frac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$   
L'ensemble cherché est le cercle de centre  $O$  et de rayon 1.

$$c) \frac{z'-1}{z'-i} = \frac{\frac{1}{\bar{z}}-1}{\frac{1}{\bar{z}}-i} = \frac{1-\bar{z}}{1-i\bar{z}} = \frac{\bar{z}-1}{i\bar{z}-1} = \frac{\bar{z}-1}{i\bar{z}+i^2} = \frac{1}{i} \times \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+i} = -i \times \overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}$$

D'après l'énoncé,  $z \neq 1$ ,  $z \neq i$ ,  $z' \neq 1$ ,  $z' \neq i$  et

$$\arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right) = \arg(-i) - \arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = -\frac{\pi}{2} - \arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) \text{ à } 2k\pi \text{ près.}$$

- 3) a) Dire que M appartient à la droite (UV) privée de U et de V équivaut à dire qu'il existe un réel  $k$  non nul tel que  $\vec{UM} = k\vec{VM}$  qui se traduit aussi par :  $\frac{z-1}{z-i}$  est un réel  $k$  non nul.
- b) M appartient à la droite (UV) privée de U et de V équivaut à dire que  $\frac{z-1}{z-i}$  est un réel non nul donc  $\arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)$  égale 0 ou  $\pi$  (à  $2k\pi$  près) donc avec la relation vue en 2-c : M appartient à la droite (UV) privée de U et de V équivaut à dire que  $\arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right)$  égale  $\frac{\pi}{2}$  ou  $-\frac{\pi}{2}$  (à  $2k\pi$  près) ou encore, M' appartient au cercle de diamètre [UV] privé de U et de V.
- L'image par  $f$  de (UV) privée de U et de V est le cercle de diamètre [UV] privé de U et de V.

**EXERCICE 3 - Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité (5 points)**

**Partie A**

1) Théorème de Bézout - Théorème de GAUSS

2) Démonstration :

Soient  $a, b$  et  $c$  trois entiers tels que  $a$  divise  $bc$  et  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux. Il existe 2 entiers  $u$  et  $v$  tels que :  $au + bv = 1$  ce qui donne  $acu + bcv = c$  (1). Il existe un entier  $q$  tel que  $bc = aq$  (2). (1) et (2) entraînent  $a(cu + qv) = c$  et  $a$  divise  $c$ .

**Partie B**

1) 19 et 12 sont premiers entre eux ; d'après le théorème de Bézout, il existe un couple  $(u, v)$  d'entiers relatifs tel que  $19u + 12v = 1$ .

$$6 \times 19u \equiv 0 \pmod{19} \text{ donc } N \equiv 13 \times 12v \pmod{19}$$

$$\text{Or, } 12v \equiv 1 \pmod{19} \text{ donc } N \equiv 13 \pmod{19}. \text{ De même : } 13 \times 12v \equiv 0 \pmod{12} \text{ donc } N \equiv 6 \times 19u \pmod{12}.$$

$$\text{Or, } 19u \equiv 1 \pmod{12} \text{ donc } N \equiv 6 \pmod{12}$$

2) a) L'équivalence résulte directement de la propriété de transitivité de la relation de congruence.

$$\text{b) Si } \begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12} \end{cases} \text{ alors } n - n_0 \text{ est divisible par 12 et par 19.}$$

Il existe alors un entier relatif  $p$  tel que  $n - n_0 = 12p$ . Les nombres 19 et 12 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 19 divise  $12p$  d'où  $n - n_0 \equiv 0 \pmod{12 \times 19}$ .

Réciproquement, si  $n - n_0$  est divisible par  $12 \times 19$ , alors  $n - n_0$  est divisible par 12 et par 19.

3) a) En utilisant par exemple l'algorithme d'Euclide étendu, on obtient  $(u_0, v_0) = (-5, 8)$ .

Ainsi  $N = 678$  est solution de (S).

$$\text{b) D'après la question 2), l'ensemble solution de (S) est } \Sigma = \{678 + 12 \times 19q ; q \in \mathbf{Z}\}.$$

4)  $n$  est un élément de  $\Sigma$ , donc  $n \equiv 678 \pmod{228}$ . Le nombre  $n$  et le nombre 678 ont le même reste  $r$  dans la division euclidienne par 228, d'où  $r = 222$ .

**EXERCICE 4 (5 points)**

1) Les tirs sont indépendants et pour chacun la probabilité d'atteindre le ballon est  $p = 0,2$ .

a) Chacun des 2 tirs est un échec ; la probabilité cherchée est  $0,8^2 = 0,64$ .

b) Deux tirs suffisent pour crever le ballon est l'événement contraire du précédent : « au bout de 2 tirs le ballon est intact ». La probabilité cherchée est  $1 - 0,64 = 0,36$ .

c) «  $n$  tirs suffisent pour crever le ballon » est l'événement contraire de « au bout de  $n$  tirs le ballon est intact » :  $p_n = 1 - 0,8^n$ .

d) La résolution de  $p_n > 0,99$  donne  $n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)}$  avec  $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \approx 20,6$ .

Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 21 on a  $p_n > 0,99$ .

2) Pour chaque valeur de  $k$  avec  $1 \leq k \leq 4$ , la probabilité de crever le ballon est la probabilité  $p_k$  calculée en 1)c) :  $p_k = 1 - 0,8^k$ .

Le dé n'est pas pipé, donc chaque face a la même probabilité de sortie, égale à 0,25.

La probabilité de crever le ballon est  $0,25(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = 0,4096$ .

3) a)

Face $k$	1	2	3	4
Fréquence $f_k$	0,29	0,245	0,26	0,205

b)  $d^2 = 0,00375$

c)  $d^2 < D_9$ , donc au risque de 10 %, il n'y a pas lieu de considérer que le dé est pipé.