CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

ÉLÉMENTS DE CORRECTION
BARÈME PROPOSÉ

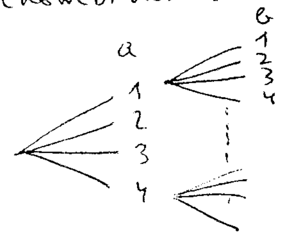
N.B. : **Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. Les règles de confidentialité habituelles s'appliquent à son contenu.**

Exercice 1 (4 points)

1. $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff a(1+b) - 5 + b(1-a) = 0$

(repère orthonormal) $\iff a+b = 5$

Dénombrons l'univers Ω par un arbre :



card $\Omega = 16$

Les tirages sont faits au hasard : les éventualités sont équiprobables. Parmi elles, 4 appartiennent à l'événement étudié :

(0,75) $(1;4), (2;3), (3;2), (4;1)$

La probabilité cherchée est égale à : $\frac{4}{15} = \frac{1}{4}$

2. a. $p(A_1) = p(A_0 \cap B_N) = p(A_0) \times p(B_N)$ (indépendance)

(0,5) $= \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$

en notant : A_0 : A obtient des vecteurs orthogonaux

B_N : B ——— non orthogonaux

$p(B_1) = p(A_1) = \frac{3}{15}$ par symétrie.

Calcul de $p(C_n)$ (1)

· $p(A_1 \cup B_1 \cup C_1) = 1$ et, les évts étant incompatibles

$p(A_1) + p(B_1) + p(C_1) = 1$ d'où $p(C_1) = 1 - 2\times\frac{3}{16} = \frac{5}{8}$

b $p(C_{n+1}) = p(C_n \cap \overline{A_{n+1} \cup B_{n+1}})$

$= p(C_n) \times p(\overline{A_{n+1} \cup B_{n+1}} \mid C_n)$

$= p(C_n) \times p(\overline{A_1 \cup B_1}) = p(C_n) \times p(C_1)$

puisque les épreuves sont indépendantes et identiques ainsi : $p(C_{n+1}) = p(C_n) \times \frac{5}{8}$

La suite de terme général $p(C_n)$ est donc géométrique, de raison $\frac{5}{8}$ et de premier terme $p(C_1) = \frac{5}{8}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a donc : $p(C_n) = \left(\frac{5}{8}\right)^n$

Calcul de $p(A_n)$

0,5

$\cdot\ p(A_{n+1}) = p(C_n \cap A_{n+1}) = p(C_n) \times p(A_{n+1} \mid C_n)$

$= p(C_n) \times p(A_1)$ (voir remarque précédente)

$= p(C_n) \times \frac{3}{16}$

d'où $p(A_n) = p(C_{n-1}) \times \frac{3}{16} = \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} \times \frac{3}{16}$

0,5

3. a. La suite de terme général $p(A_n)$ est géométrique de raison $\frac{5}{8}$, donc strictement inférieure à 1 en valeur absolue.

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} p(A_n) = 0$

0,75

b. $p(A_n) \leqslant 0,01$ équivaut successivement à :

$\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} \times \frac{3}{16} \leqslant 0,01$; $\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} \leqslant \frac{0,16}{3}$;

$(n-1) \ln \frac{5}{8} \leqslant \ln\left(\frac{0,15}{3}\right)$ ln étant croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$n - 1 \geqslant \frac{\ln\left(\frac{0,15}{3}\right)}{\ln \frac{5}{8}}$ $\left(\ln \frac{5}{8} < 0\right)$ (le quotient est strictement entre 6 et 7 et n est entier

$n - 1 \geqslant 7$

$n \geqslant 8$.

Le plus petit entier cherché est 8.

ÉLÉMENTS DE CORRECTION
BARÈME PROPOSÉ

N.B. : **Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. Les règles de confidentialité habituelles s'appliquent à son contenu.**

OBLIGATOIRE

Exercice 2 : (5 points)

Résolution 0,5

1. $\Delta = -4$, donc l'équation admet 2 solutions complexes conjuguées :

$z_1 = \boxed{\sqrt{3}+i}$ et $z_2 = \boxed{\sqrt{3}-i}$

écriture 0,25

$\boxed{a = 2e^{i\frac{\pi}{6}}}$ et $\boxed{b = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}}$

0,5

2.a. $a' = e^{i\frac{\pi}{3}} \times a$

donc $a' = 2e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3})} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = \boxed{2i}$

0,5

2.b. $b' = -\frac{3}{2}b = -\frac{3}{2}(\sqrt{3}-i) = \boxed{-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i}$

$\left(\text{ou } b' = -\frac{3}{2} \times 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = -3e^{-i\frac{\pi}{6}} = 3e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)$

3.a.

C est le centre du cercle circonscrit à OA'B', de rayon R, donc : $OC^2 = R^2 \Leftrightarrow |c|^2 = R^2$

et $|c|^2 = R^2 \Leftrightarrow \boxed{c\bar{c} = R^2}$

0,75

On a également : $A'C^2 = R^2 \Leftrightarrow |c-a'|^2 = R^2$

et $|c-a'|^2 = R^2 \Leftrightarrow (c-2i)(\overline{c-2i}) = R^2 \Leftrightarrow \boxed{(c-2i)(\bar{c}+2i) = R^2}$

dont 0,25 pour une rédaction convenable

De même : $B'C^2 = R^2 \Leftrightarrow |c-b'|^2 = R^2$

$|c-b'|^2 = R^2 \Leftrightarrow \boxed{\left(c+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\left(\bar{c}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right) = R^2}$

3.b. $(c-2i)(\overline{c}+2i)=R^2 \Leftrightarrow c\overline{c}+2i(c-\overline{c})-4i^2=R^2$

Or, $c\overline{c}=R^2$, donc $2i(c-\overline{c})=-4$, soit :

0,5 $$\boxed{c-\overline{c}=2i}$$

$$\left(c+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\left(\overline{c}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)=R^2$$

$$\Leftrightarrow c\overline{c}+\frac{3\sqrt{3}}{2}(c+\overline{c})+\frac{3}{2}i(c-\overline{c})+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)=R^2$$

0,75 $$\Leftrightarrow R^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}(c+\overline{c})+\frac{3}{2}i(2i)+\left|\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right|^2=R^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2}(c+\overline{c})-3+9=0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{c+\overline{c}=-\frac{4\sqrt{3}}{3}}$$

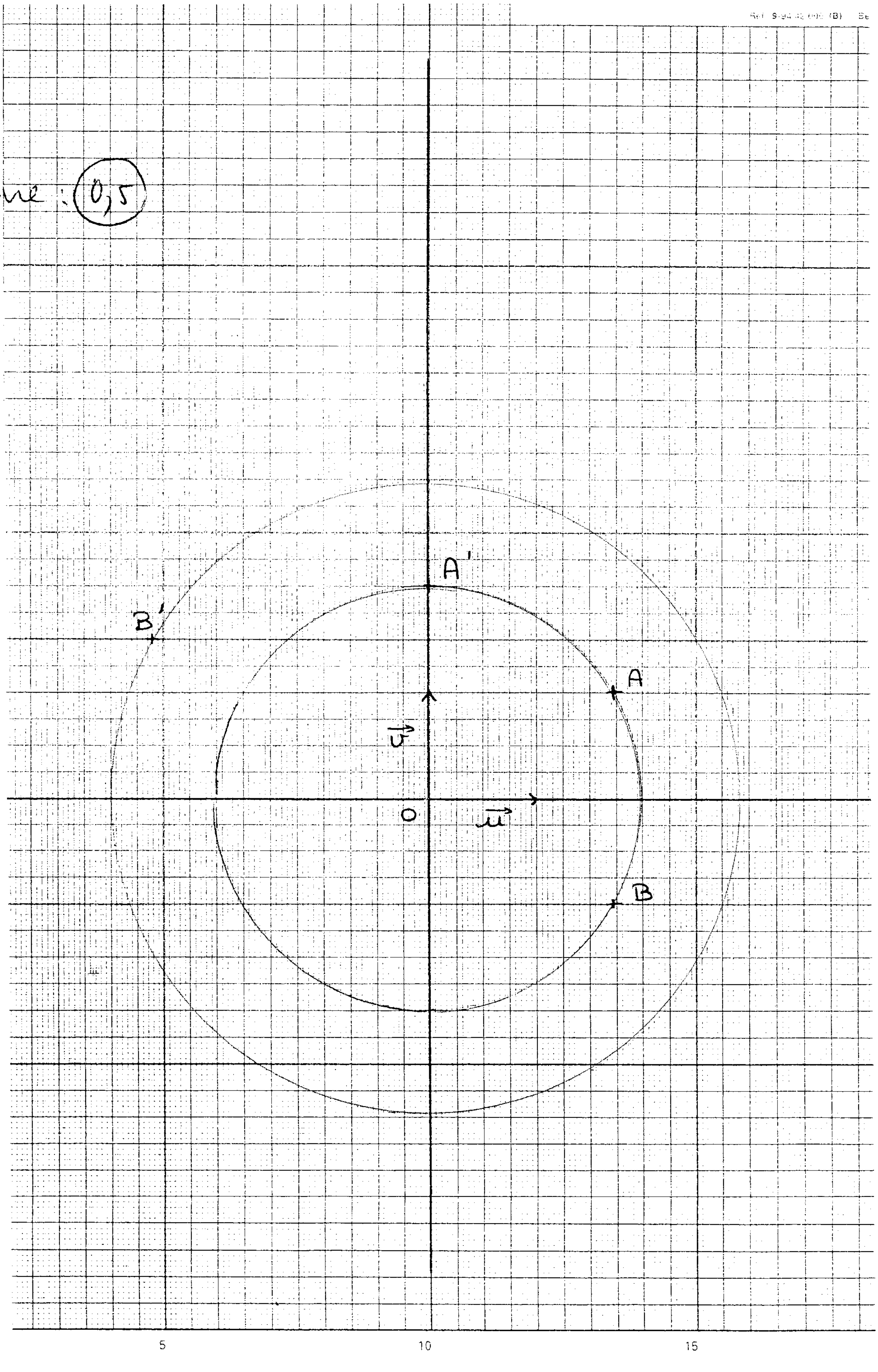
3.c. $\begin{cases} c-\overline{c}=2i \\ c+\overline{c}=-\frac{4\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c=2i-\frac{4\sqrt{3}}{3} \\ 2\overline{c}=-\frac{4\sqrt{3}}{3}-2i \end{cases}$

0,75 $\Leftrightarrow \begin{cases} c=-\frac{2\sqrt{3}}{3}+i \\ \overline{c}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}-i \end{cases}$ $\boxed{c=-\frac{2\sqrt{3}}{2}+i}$

$$R^2=|c|^2=\frac{4\times 3}{4}+1=4$$

donc $\boxed{R=2}$

Figure : 0,5



ÉLÉMENTS DE CORRECTION
BARÈME PROPOSÉ

N.B. : **Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. Les règles de confidentialité habituelles s'appliquent à son contenu.**

SPÉCIALITÉ

Exercice 2 (5 points)

0,25

1\. a. $6\times(-1)+7\times 1 = 1$

$6\times(-57)+7\times 57 = 57$ $\boxed{(x_0 ; y_0) = (-57 ; 57)}$

b. (x, y) est solution de (E)

$\Leftrightarrow 6x+7y = 57$

$\Leftrightarrow 6(x+57)+7(y-57) = 0$

Nécessairement $7 \mid 6(x+7)$

or $7 \wedge 6 = 1$ donc $7 \mid x+7$ (gauss)

et $x+57 = 7k$ $(k \in \mathbb{Z})$

de même, $y-57 = 6\ell$ $(\ell \in \mathbb{Z})$

avec nécessairement : $6\times 7k + 7\times 6\ell = 0$ et $k = -\ell$

l'expression finale n'est pas la même pour tous les candidats, bien sûr !

1

réciproquement, tout couple $(-57+7k, 57-6k)$, où $k \in \mathbb{Z}$, est solution. $\mathcal{S} = \{(-57+7k, 57-6k), k \in \mathbb{Z}\}$

2\. $M(x, y, z) \in P \cap (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x+7y+8z = 57 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+7y = 57 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -57+7k \\ y = 57-6k \\ z = 0 \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

$(x, y) \in \mathbb{N}^2 \Leftrightarrow \begin{cases} -57+7k \geqslant 0 \\ \text{et} \\ 57-6k \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geqslant 9 \\ \text{et} \\ k \leqslant 9 \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow k = 9$

0,75

Un seul point répond à la question :
Ce point a pour coordonnées $(-57+7\times 9, 57-6\times 9, 0)$

soit : $(6, 3, 0)$

0,5

3. a. Si y était pair, 57 serait pair comme somme de trois entiers pairs, donc y est impair.

b. Ecrivons la division euclidienne de $p+z$ par 3

$p+z = 3q + r$, avec $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0, 1, 2\}$

0,75

$M \in P$, donc :

$6x + 7(2p+1) + 8(-p+3q+r) = 57$

$6x + 6p + 24q + 8r + 1 = 51$

donc $3 \mid 8r+1$. La seule valeur possible pour r est bien 1.

c. Ecrivons l'égalité du b. pour $r = 1$. On obtient

$6x + 6p + 24q = 42$ soit : $x + p + 4q = 7$

0,75

x, p et q étant des entiers naturels

$x + p \geqslant 0$ et $x + p + 4q \geqslant 4q$

donc $7 \geqslant 4q$ et $\frac{7}{4} \geqslant q$

$q \in \mathbb{N}$, donc $q = 0$ ou $q = 1$

d. • On a donc démontré que, pour tout point du plan P de coordonnées x, y et z dans $\mathbb{N}$,

$$\begin{cases} x = 7 - p - 4q \\ y = 2p+1 \\ z = 1 - p + 3q \end{cases} \quad \text{avec } p \in \mathbb{N} \text{ et } q \in \{0, 1\}$$

soit 1/ $\begin{cases} x = 7 - p \\ y = 2p+1 \\ z = 1 - p \end{cases}$ $p \in \mathbb{N}$ ou 2/ $\begin{cases} x = 3 - p \\ y = 2p+1 \\ z = 4 - p \end{cases}$ $p \in \mathbb{N}$

• Réciproquement, les points ainsi définis vérifient l'équation de P $(6x + 7y + 8z = 57)$

1

Déterminons, pour chaque cas les valeurs de l'entier naturel p telles que x, y et z soient dans $\mathbb{N}$.

1/ $\begin{cases} 7-p \geqslant 0 \\ 2p+1 \geqslant 0 \\ 1-p \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \geqslant p \Leftrightarrow \begin{cases} p=0 \\ \text{ou} \\ p=1 \end{cases}$ On obtient les points de coordonnées $(7;1;1)$ et $(6;3;0)$

ÉLÉMENTS DE CORRECTION
BARÈME PROPOSÉ

N.B. : **Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. Les règles de confidentialité habituelles s'appliquent à son contenu.**

2/ $\begin{cases} 3-p \geqslant 0 \\ 2p+1 \geqslant 0 \\ 4-p \geqslant 0 \end{cases} \iff 3 \geqslant p \iff \begin{cases} p=0 \\ \text{ou} \\ p=1 \\ \text{ou} \\ p=2 \\ \text{ou} \\ p=3 \end{cases}$

qui donnent les points de coordonnées
$(3\,;1\,;4), (2\,;3\,;3), (1\,;5\,;2), (0\,;7\,;1)$

$\boxed{\text{Les points de } P \text{ cherchés sont les 6 points de coordonnées } (7\,;1\,;1)(6\,;3\,;0)(3\,;1\,;4)(2\,;3\,;3)\,;(1\,;5\,;2) \text{ et } (0\,;7\,;1)}$

ÉLÉMENTS DE CORRECTION
BARÈME PROPOSÉ

N.B. : **Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. Les règles de confidentialité habituelles s'appliquent à son contenu.**

PROBLEME : (11 points)

5 points

Partie A :

1 : dont 0,25 pour une bonne rédaction

1.a. Pour x réel, $f(x) = \frac{1}{2}(x + e^{2x} - x e^{2x})$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} x e^{2x} = \lim\limits_{X \to -\infty} \frac{1}{2} X e^X = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (x + e^{2x}) = -\infty \end{array}\right\}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$

Pour x réel, $f(x) = \frac{1}{2} e^{2x} (x e^{-2x} + (1-x))$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-2x} = \lim\limits_{X \to -\infty} -\frac{1}{2} X e^X = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (1-x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2} e^{2x} = +\infty \end{array}\right\}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$

0,5

1.b. Pour x réel, $f(x) - \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1-x)e^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{2} e^{2x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{2} x e^{2x} = \lim\limits_{X \to -\infty} \frac{1}{4} X e^X = 0 \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) = 0$

La droite Δ d'équation $y = \frac{x}{2}$ est donc asymptote à C en $-\infty$.

0,5

$f(x) - \frac{x}{2} \geq 0$ sur $[1 ; +\infty[$ et $f(x) - \frac{x}{2} \leq 0$ sur $]-\infty ; 1]$

Donc C est au-dessous de Δ sur $]-\infty ; 1]$ et C est au-dessus de Δ sur $[1 ; +\infty[$.

0,5

2. Les fonctions polynômes et exp sont dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit et somme de telles fonctions.

Pour x réel, $\boxed{f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 + (1-2x)e^{2x}\right)}$

3.a. u dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{u'(x) = -4xe^{2x}}$

0,5 — $u'(x)$ est positif sur $]-\infty ; 0]$, donc la fonction u est croissante sur $]-\infty ; 0]$

$u'(x)$ est négatif sur $[0 ; +\infty[$, donc la fonction u est décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

3.b. La fonction u est dérivable et strictement décroissante sur $[0 ; 1]$ donc réalise une bijection de $[0 ; 1]$ sur $[u(1) ; u(0)]$.

1 (si bonne rédaction) — Or, $u(1) = 1 - e^2$, et $u(0) = 2$

0 est compris entre $u(1)$ et $u(0)$, donc l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0 ; 1]$

0,25 — $u(0{,}63) \approx 0{,}083$, et $u(0{,}64) \approx -0{,}007$

Une valeur approchée de α par excès à 10^{-2} près est donc : $\boxed{0{,}64}$

3.c.

0,5

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
u	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	
signe de $u(x)$		$+$			0	$-$	

$\left[\lim_{x \to -\infty} u(x) = 1 \quad (\text{car } \lim_{x \to -\infty} e^{2x} = 0 \text{ et } \lim_{x \to -\infty} 2xe^{2x} = 0) \right]$

4. Pour x réel, $f'(x) = \frac{1}{2} u(x)$. $f'(x)$ a même signe que $u(x)$.

0,25

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

3,5 points

Partie B

1. $M_t(t ; e^t)$

0,5 — La tangente à Γ au point M_t a pour équation :

$y = e^t + e^t(x - t)$

Pour $x = 0$, $y = e^t(1 - t)$

0,25 — Donc le point d'intersection de la tangente à Γ au point M_t et de l'axe des ordonnées est :

$\boxed{N_t = (0 ; e^t(1 - t))}$

dessin + construction 0,5

2.a. $M_{-2}(-2; e^{-2})$; $P_{-2}(-2; -2)$; $N_{-2}(0; 3e^{-2})$

G_{-2} est le barycentre de $(O;1)$; $(M_{-2};1)$; $(P_{-2};1)$; $(N_{-2};1)$

Soit I_{-2} le milieu de $[ON_{-2}]$, J_{-2} le milieu de $[M_{-2};P_{-2}]$.

0,5

G_{-2} est le barycentre de $(I_{-2};2)$; $(J_{-2};2)$, donc G_{-2} est le milieu de $[I_{-2}J_{-2}]$.

2.b. Soit I_t milieu de $[ON_t]$, alors

$I_t\left(0;\frac{e^t}{2}(1-t)\right)$

1

Soit J_t milieu de $[M_t P_t]$, alors $J_t\left(t;\frac{e^t+t}{2}\right)$

G_t est le milieu de $[I_t J_t]$, alors

$$\boxed{G_t\left(\frac{t}{2};\frac{2e^t-te^t+t}{4}\right)}$$

3. $\begin{cases} x=\frac{t}{2} \\ y=\frac{2e^t-te^t+e^t}{4}\end{cases} \iff \begin{cases} t=2x \\ y=f(x)\end{cases}$

0,75 si bonne justification

L'ensemble des points G_t $(t\in\mathbb{R})$ est la courbe $\mathcal{C}$.

2,5 points

Partie C.

1

1. Voir annexe

2. $I=\int_0^1\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)dx=\int_0^1\frac{1}{2}(1-x)e^{2x}\,dx$

$I=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)e^{2x}\,dx$. Posons $u(x)=1-x$ et $v'(x)=e^{2x}$

alors : $u'(x)=-1$ et $v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$

Par intégration par parties,

$I=\frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{2}(1-x)e^{2x}\right]_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\,dx\right)$

1,5

$I=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1\right)=\frac{e^2-3}{8}$.

$\mathcal{A}=I\times 4\,\text{cm}^2=\boxed{\frac{e^2-3}{2}\,\text{cm}^2}$

annexe problème