

CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

ELEMENTS DE CORRECTION

Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. La règle de confidentialité relative aux commissions d'entente et aux travaux des jurys s'applique à son contenu.

EXERCICE 1 (5 points)

1	2	3	4	5
V	F	V	F	V

EXERCICE 2 (5 points)

1) a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Pour tout réel x , $f(x) = e \frac{x^2}{e^x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

L'axe des abscisses est asymptote à la courbe C en $+\infty$.

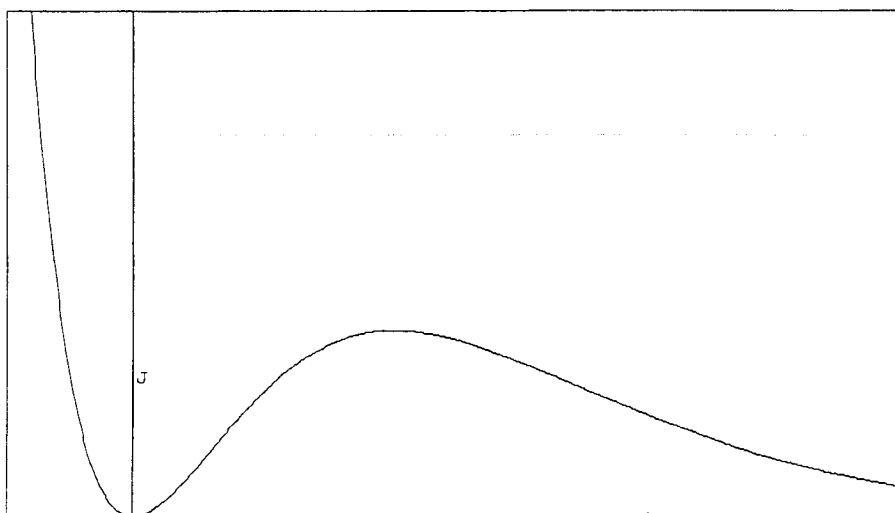
b) La fonction carré et la fonction composée $\exp u$, où u est une fonction affine, sont dérivables sur \mathbf{R} . f est dérivable sur \mathbf{R} comme produit de fonctions dérivables.

Pour tout réel x , on obtient $f'(x) = (2x - x^2) e^{1-x}$.

c) $f'(x)$ est négatif sur $] -\infty ; 0[$ et sur $]2 ; +\infty[$ et $f'(x)$ est positif sur $]0 ; 2[$. D'où les variations de f .

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0
$f(x)$	$+\infty$	0	$\frac{4}{e}$	0

Tracé de la courbe \mathcal{C} .



- 2) a) Une intégration par parties donne pour tout entier n non nul $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.
- b) Avec une intégration par parties, on obtient $I_1 = e^{-2}$.
Avec la question a) $I_2 = -1 + 2I_1 = 2e^{-5}$.
- c) La fonction f est positive sur l'intervalle $[0; 1]$. I_2 représente l'aire, en unité d'aire du domaine plan délimité par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 0$.
- 3) a) Si $x \in [0; 1]$; $0 \leq 1-x \leq 1$. La fonction exponentielle est croissante donc $1 \leq e^{1-x} \leq e$.
 x^n est positif donc pour tout x de $[0; 1]$, on a $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq e x^n$.
- b) Par intégration de ces inégalités sur $[0; 1]$, on obtient $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$.
Par application du théorème des gendarmes la limite de la suite (I_n) est 0.

EXERCICE 3 - Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité (5 points)

- 1) a) $\arg\left(z' \times \frac{1}{z'}\right) = \arg(1) = 0$ à $2k\pi$ près. Ainsi $\arg\left(\frac{1}{z'}\right) = -\arg(z')$ à $2k\pi$ près et
 $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ à $2k\pi$ près.
- b) $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg(c-a) - \arg(b-a) = (\vec{u}, \vec{AC}) - (\vec{u}, \vec{AB}) = (\vec{AB}, \vec{AC})$ à $2k\pi$ près.
- 2) a) $\arg(z') = -\arg(\bar{z}) = -(-\arg(z)) = \arg(z)$ à $2k\pi$ près.

Géométriquement cela signifie que : $(\vec{u}, \vec{OM}') = (\vec{u}, \vec{OM})$, donc que les vecteurs

\vec{OM}' et \vec{OM} sont colinéaires et de même sens ou encore que M et M' sont sur une même demi-droite d'origine O .

b) $f(M) = M \Leftrightarrow z = \frac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$

L'ensemble cherché est le cercle de centre O et de rayon 1.

c) $\frac{z'-1}{z'-i} = \frac{\frac{1}{\bar{z}}-1}{\frac{1}{\bar{z}}-i} = \frac{1-\bar{z}}{1-i\bar{z}} = \frac{\bar{z}-1}{i\bar{z}-1} = \frac{\bar{z}-1}{i\bar{z}+i^2} = \frac{1}{i} \times \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+i} = -i \times \overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}$

D'après l'énoncé, $z \neq 1$, $z \neq i$, $z' \neq 1$, $z' \neq i$ et

$\arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right) = \arg(-i) - \arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = -\frac{\pi}{2} - \arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)$ à $2k\pi$ près.

- 3) a) Dire que M appartient à la droite (UV) privée de U et de V équivaut à dire qu'il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{UM} = k\overrightarrow{VM}$ qui se traduit aussi par : $\frac{z-1}{z-i}$ est un réel k non nul.
- b) M appartient à la droite (UV) privée de U et de V équivaut à dire que $\frac{z-1}{z-i}$ est un réel non nul donc $\arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)$ égale 0 ou π (à $2k\pi$ près) donc avec la relation vue en 2-c : M appartient à la droite (UV) privée de U et de V équivaut à dire que $\arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right)$ égale $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ (à $2k\pi$ près) ou encore, M' appartient au cercle de diamètre $[UV]$ privé de U et de V .
- L'image par f de (UV) privée de U et de V est le cercle de diamètre $[UV]$ privé de U et de V .

EXERCICE 3 - Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité (5 points)

Partie A

1) Théorème de Bézout - Théorème de GAUSS

2) Démonstration :

Soient a, b et c trois entiers tels que a divise bc et a et b sont premiers entre eux. Il existe 2 entiers u et v tels que : $au + bv = 1$ ce qui donne $acu + bcv = c$ (1). Il existe un entier q tel que $bc = aq$ (2). (1) et (2) entraînent $a(cu + qv) = c$ et a divise c .

Partie B

1) 19 et 12 sont premiers entre eux ; d'après le théorème de Bézout, il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs tel que $19u + 12v = 1$.

$$6 \times 19u \equiv 0 \pmod{19} \text{ donc } N \equiv 13 \times 12v \pmod{19}$$

$$\text{Or, } 12v \equiv 1 \pmod{19} \text{ donc } N \equiv 13 \pmod{19}. \text{ De même : } 13 \times 12v \equiv 0 \pmod{12} \text{ donc } N \equiv 6 \times 19u \pmod{12}.$$

$$\text{Or, } 19u \equiv 1 \pmod{12} \text{ donc } N \equiv 6 \pmod{12}$$

2) a) L'équivalence résulte directement de la propriété de transitivité de la relation de congruence.

$$\text{b) Si } \begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12} \end{cases} \text{ alors } n - n_0 \text{ est divisible par 12 et par 19.}$$

Il existe alors un entier relatif p tel que $n - n_0 = 12p$. Les nombres 19 et 12 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 19 divise $12p$ d'où $n - n_0 \equiv 0 \pmod{12 \times 19}$.

Réciproquement, si $n - n_0$ est divisible par 12×19 , alors $n - n_0$ est divisible par 12 et par 19.

3) a) En utilisant par exemple l'algorithme d'Euclide étendu, on obtient $(u_0, v_0) = (-5, 8)$.

Ainsi $N = 678$ est solution de (S).

$$\text{b) D'après la question 2), l'ensemble solution de (S) est } \Sigma = \{678 + 12 \times 19q ; q \in \mathbf{Z}\}.$$

4) n est un élément de Σ , donc $n \equiv 678 \pmod{228}$. Le nombre n et le nombre 678 ont le même reste r dans la division euclidienne par 228, d'où $r = 222$.

EXERCICE 4 (5 points)

1) Les tirs sont indépendants et pour chacun la probabilité d'atteindre le ballon est $p = 0,2$.

a) Chacun des 2 tirs est un échec ; la probabilité cherchée est $0,8^2 = 0,64$.

b) Deux tirs suffisent pour crever le ballon est l'événement contraire du précédent : « au bout de 2 tirs le ballon est intact ». La probabilité cherchée est $1 - 0,64 = 0,36$.

c) « n tirs suffisent pour crever le ballon » est l'événement contraire de « au bout de n tirs le ballon est intact » : $p_n = 1 - 0,8^n$.

d) La résolution de $p_n > 0,99$ donne $n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)}$ avec $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \approx 20,6$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 21 on a $p_n > 0,99$.

2) Pour chaque valeur de k avec $1 \leq k \leq 4$, la probabilité de crever le ballon est la probabilité p_k calculée en 1)c) : $p_k = 1 - 0,8^k$.

Le dé n'est pas pipé, donc chaque face a la même probabilité de sortie, égale à 0,25.

La probabilité de crever le ballon est $0,25(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = 0,4096$.

3) a)

Face k	1	2	3	4
Fréquence f_k	0,29	0,245	0,26	0,205

b) $d^2 = 0,00375$

c) $d^2 < D_9$, donc au risque de 10 %, il n'y a pas lieu de considérer que le dé est pipé.