CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

ÉLÉMENTS DE CORRECTION ET BARÈME INDICATIF PROPOSÉS

N.B. : Il est rappelé que ce document est à l'usage exclusif des jurys. Les règles de confidentialité habituelles concernant les travaux des jurys, des commissions d'entente et des permanences téléphoniques s'appliquent à son contenu.

Exercice 1 *(4 points)*
Commun à tous les candidats

Barème indiqué sur le sujet. Arrondir au demi-point supérieur.

1. *a.*	FAUX	2. *a.*	VRAI	3. *a.*	FAUX
1. *b.*	VRAI	2. *b.*	FAUX	3. *b.*	VRAI
1. *c.*	FAUX	2. *c.*	VRAI	3. *c.*	VRAI
				3.*d.*	FAUX

Exercice 2 *(5 points)*

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

0,25 point par résultat

1. On trouve $z_1 = 1+\mathrm{i}$, $z_2 = \mathrm{i}$, $z_3 = \frac{1}{4}(1+\mathrm{i})$ et $z_4 = -\frac{1}{4}$, qui est bien un réel.

0,75 point (on peut aussi faire une récurrence)

2. De la proposition « pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \frac{1+\mathrm{i}}{2} z_n$ », on tire

« pour tout entier naturel n, $|z_{n+1}| = \left|\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right| \times |z_n|$ », et finalement

0,25 point pour la formule

« pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} u_n$ », qui caractérise la suite (u_n) comme géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Son premier terme est 2, on obtient le résultat demandé.

1 point pour la résolution bien rédigée

3. La condition proposée s'écrit sous la forme d'une inéquation d'inconnue l'entier naturel n : $2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leqslant 0{,}1$.

Cette inéquation s'écrit : $n \geqslant 2 + \frac{2\ln 10}{\ln 2}$, qui fournit $n_0 = 9$.

0,5 point

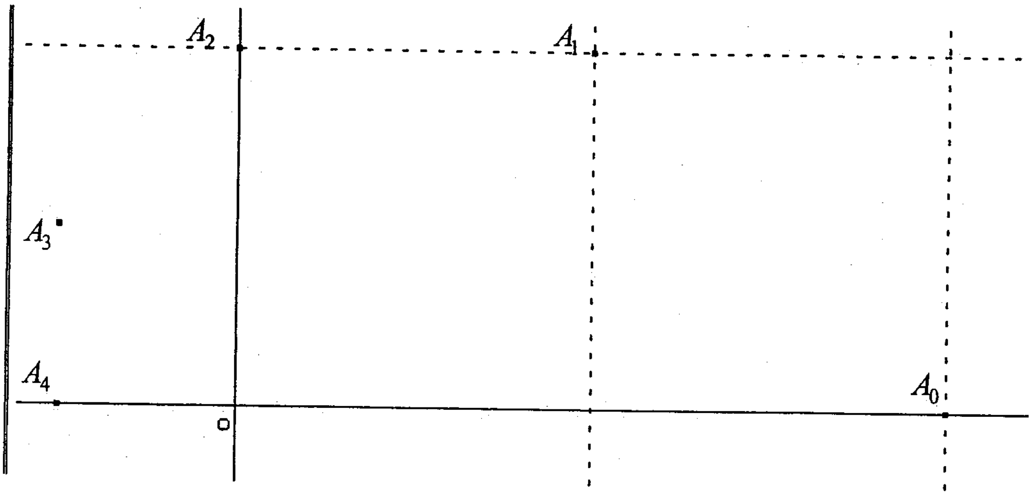
4. *a.* On calcule : $(1-\mathrm{i})\, z_{n+1} = (1-\mathrm{i})\frac{(1+\mathrm{i})}{2} z_n$, puis $(1-\mathrm{i})\, z_{n+1} = z_n$, et le triangle OA_nA_{n+1} est isocèle rectangle de sommet principal A_{n+1}.

1 point, dont 0,25 pour la limite.

b. On peut écrire $\ell_n = |z_1 - z_0| + |z_2 - z_1| + |z_3 - z_2| + \ldots + |z_n - z_{n-1}|$ et, d'après la relation du *a.*, $\ell_n = |\mathrm{i}z_1| + |\mathrm{i}z_2| + |\mathrm{i}z_3| + \ldots + |\mathrm{i}z_n|$, ou encore $\ell_n = |z_1| + |z_2| + |z_3| + \ldots + |z_n|$ et finalement $\ell_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$, où on voit une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.

On obtient : $\ell_n = \left(2+2\sqrt{2}\right)\left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right)$ et la limite de (ℓ_n) est $2+2\sqrt{2}$.

Figure 0,5 point



Exercice 2 *(5 points)*

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1,25 points pour la caractérisation complète

1. L'équation $z' = z$ s'écrit :

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)z = 1.$$

Il y a donc un unique point fixe, le point Ω d'affixe $\omega = 1 + i$. On peut écrire, pour tout z d'image z' :

$$z' - \omega = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(z - \omega),$$

qui caractérise la similitude de centre Ω, de rapport le module de $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, c'est-à-dire $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle un argument de $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, c'est-à-dire $\frac{\pi}{4}$.

0,25 point par calcul

2. *a.* Appelons z_1, z_2 et z_3 les affixes de ces points. On obtient par le calcul : $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ et $z_3 = \frac{3}{2} + i$.

0,75 point

b. Par définition de la similitude, on a pour tout entier naturel n : $\Omega A_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Omega A_n$, relation qui caractérise bien la suite (u_n) comme géométrique de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Le premier terme de cette suite étant $\sqrt{2}$ (le module de ω), on obtient la formule demandée.

0,75 point

c. Répondre à cette question revient à résoudre l'inéquation d'inconnue l'entier naturel n :

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leqslant 0{,}1.$$

Cette inéquation s'écrit : $n \geqslant 1 + \frac{\ln 10}{\ln\sqrt{2}}$, qui conduit à $n_0 = 8$.

0,25 point + 0,25 point

3. *a.* Le triangle $\Omega A_0 A_1$ est rectangle isocèle de sommet principal A_1. Il en est donc de même, quel que soit l'entier naturel n, du triangle $\Omega A_n A_{n+1}$, isocèle rectangle de sommet principal A_{n+1}, qui est son image par une similitude (composée de n similitudes).

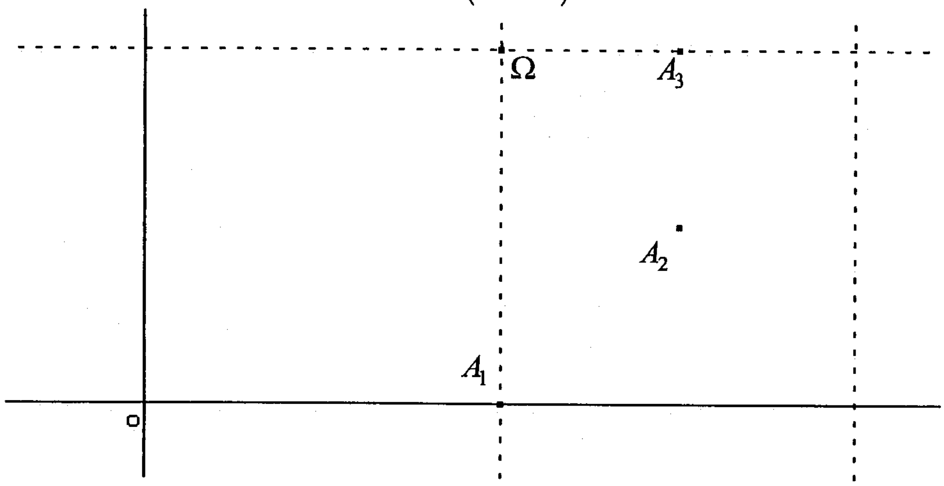
0,75 point

b. D'après la propriété précédente, on peut écrire : $\ell_n = \Omega A_1 + \Omega A_2 + \Omega A_3 + \ldots + \Omega A_n$, ou encore $\ell_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$, qui fait apparaître ℓ_n comme une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique. On a donc :

$$\ell_n = \sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right).$$

La limite de la suite (ℓ_n) est $\ell_n = \sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)$

Figure 0,25 point



Exercice 3 *(4 points)*

Commun à tous les candidats

Partie A

0,75 point

1. Le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur orthogonal au plan P. C'est donc un vecteur directeur de la droite Δ, dont un système d'équations paramétriques est obtenu en écrivant :
Le point M de coordonnées (x, y, z) est un point de Δ si et seulement si il existe un nombre réel λ tel que $\begin{cases} x = x_I + \lambda a \\ y = y_I + \lambda b \\ z = z_I + \lambda c \end{cases}$.

0,25 point

2. *a.* C'est ce qui a été écrit ci-dessus avec les notations H et k.

0,75 point

b. Du système précédent, et en changeant ce qui doit être changé, on tire :
$ax + by + cz = ax_I + by_I + cz_I + k\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$, qu'on applique au point H, point de P.
On obtient :

$$k = \frac{-d - ax_I - by_I - cz_I}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

0,5 point

c. Le vecteur $\frac{1}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$ est un vecteur unitaire directeur de Δ. On peut écrire : $IH = \left\|\overrightarrow{IH}\right\| = \|\vec{n}\||k|$, d'où le résultat.

Partie B

0,5 point

1. Le rayon de cette sphère est la distance de son centre Ω au plan Q. On a donc, d'après la partie A :

$$R=\frac{|1\times1+(-1)\times(-1)+1\times3-11|}{\sqrt{1+1+1}},$$

et donc $R=2\sqrt{3}$.

0,5 point

2. Comme dans la partie A, on obtient : $\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-1-\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases}$.

0,75 point

3. L'équation $(1+\lambda)-(-1-\lambda)+(3+\lambda)-11=0$ a pour solution le paramètre du point cherché. On trouve $\lambda=2$, et les coordonnées du point d'intersection sont $3,-3$ et 5.

Exercice 4 *(7 points)*

Commun à tous les candidats

Partie A

1 point pour une bonne rédaction de cette équivalence.

1. La fonction f étant strictement positive et dérivable sur $[0,+\infty[$, on peut définir une fonction g dérivable sur le même intervalle. Réciproquement, si une fonction g est définie et dérivable sur $[0,+\infty[$, la fonction f définie sur le même intervalle par $f=\exp\circ g$ est dérivable et strictement positive.

On peut alors écrire, pour tout t élément de $[0,+\infty[$:

$g'(t)=\dfrac{f'(t)}{f(t)}$, c'est-à-dire :

$g'(t)=-\dfrac{1}{20}\left[3-\ln(f(t))\right]$, c'est-à-dire encore :

$g'(t)=-\dfrac{3}{20}+\dfrac{1}{20}g(t)$,

les trois égalités étant équivalentes compte tenu de ce qui précède.

1 point pour la résolution de l'équation différentielle (H)

2. La fonction $t\mapsto\dfrac{3}{20}$ est une solution particulière, et la fonction $t\mapsto\exp\left(\dfrac{t}{20}\right)$ une solution de l'équation homogène. Une fonction g est donc solution de l'équation *(H)* si et seulement si il existe un réel C tel que, pour tout t élément de $[0,+\infty[$,

$g(t)=\dfrac{3}{20}+C\exp\left(\dfrac{t}{20}\right)$.

0,5 point pour la résolution de l'équation différentielle (E)

3. L'équivalence de la première question fournit donc les solutions de l'équation *(E)*.

0,5 point pour cette limite

4. *a.* On applique le théorème sur les limites de fonctions composées. On peut écrire :

$\lim\limits_{t\to+\infty}\left(t\mapsto\exp\left(\dfrac{t}{20}\right)\right)=+\infty$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\mapsto \exp(3-3x)\right)=0$, et donc finalement :

$\lim\limits_{t\to+\infty} f=0$.

0,75 point pour le sens de variation

b. La fonction f est la composée par l'exponentielle de la fonction g décroissante (car on a pour tout t élément de $\left[0,+\infty\right[$, $g'(t)=-\dfrac{3}{20}\exp\left(\dfrac{t}{20}\right)$). Elle est donc décroissante.

0,75 point pour la résolution de l'inéquation

c. Compte tenu du sens de variation de la fonction f, l'inéquation proposée est équivalente à : $t>20\ln\left(1-\dfrac{\ln 0,02}{3}\right)$.

La valeur approchée par excès entière de $20\ln\left(1-\dfrac{\ln 0,02}{3}\right)$ est 17.

Partie B

Trois fois 0,25 point

1. $P(M)=0,5$, $P_M(T)=0,99$, $P_{\bar{M}}(T)=0,001$ par interprétation directe des fréquences données dans l'énoncé comme des probabilités.

1 point

2. $T=(T\cap M)\cup(T\cap \bar{M})$, cette union étant disjointe.

$P(T\cap M)=P_M(T)\times P(M)$

$P(T\cap \bar{M})=P_{\bar{M}}(T)\times P(\bar{M})$

Donc $P(T)=P_M(T)\times P(M)+P_{\bar{M}}(T)\times P(\bar{M})$

Le calcul donne : $P(T)=0,99\times 0,5+0,001\times 0,5$

$P(T)=0,4955$.

0,75 point

3. On cherche à déterminer $P_T(M)$, qui peut aussi s'écrire $\dfrac{P(T\cap M)}{P(T)}$. Les deux termes de ce quotient sont connus.

$P_T(M)=\dfrac{0,99\times 0,5}{0,4955}$

$P_T(M)<0,99891$, et donc le test n'est pas fiable.